Feuille d'exercices 6 (Partie I)

Exercice 1. Montrer que l'application f donnée est un homomorphisme et calculer son noyau et son image.

a. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$.

b. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(z) = |z|$.

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Exercice 2. Soient $f : G \to H$ et $g : H \to K$ des homomorphismes de groupes. Montrer que $g \circ f$ est trivial ssi $\mathrm{im}(f) \subseteq \ker(g)$.

Exercice 3.

a. Existe-t-il un homomorphisme surjectif $f : \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

b. Existe-t-il un homomorphisme injectif $f : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$?

Exercice 4.

a. Soient G' un groupe et $f : \mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \to G'$ un homomorphisme non trivial. Montrer que f est injectif.

b. Soient G un groupe et $g : G \to \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ un homomorphisme non trivial. Montrer que g est surjectif.

Exercice 5. Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe monogène d'ordre fini. On considère la fonction

$$f : \mathbb{Z} \to G$$

définie par $f(k) = a^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que f est une homomorphisme de groupes surjectif.

b. Montrer que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$, où $n = \mathrm{ordre}(a)$.

Exercice 6 ! Soit G un groupe.

a. Montrer que $Z(G) = \{a \in G : ab = ba \text{ pour tout } b \in G\}$ est un sous-groupe de G.

b. Soit H un sous-groupe de G tel que si H' est un sous-groupe non trivial de G, alors $H \subseteq H'$. Montrer que $H \subseteq Z(G)$.