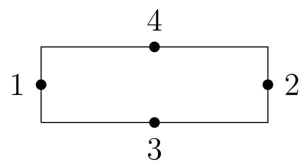
Feuille d'exercices 7

Exercice 1.

a. Soit X une partie non vide de S_n qui est stable pour l'opération de S_n. Montrer que X est un sous-groupe de S_n.

b. Est-ce vrai pour une partie non vide d'un groupe G quelconque ?

Exercice 2. Soit R le rectangle situé dans $\mathbb{R}^2$ à sommets $(0,0)$, $(0,1)$, $(3,1)$ et $(3,0)$.



Soit H le groupe d'isométries de $\mathbb{R}^2$ qui préservent R. Exprimer les éléments de H comme des permutations des points etiquetés 1, 2, 3, 4.

Exercice 3. Soit F le groupe de 6 fonctions remarquables de $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$F = \left\{ x, \frac{1}{1-x}, \frac{x-1}{x}, 1-x, \frac{1}{x}, \frac{x}{x-1} \right\}.$$

a. Trouver trois objets dans $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ qui sont permutés par les fonctions dans F.

b. Trouver un isomorphisme «géométrique» entre F et D_3.

Exercice 4. Soit H le sous-groupe suivant du groupe symétrique S_4 :

$$H = \Big\{ \varepsilon,\ (1,2),\ (3,4),\ (1,2)(3,4) \Big\}.$$

a. La démonstration vue en classe du théorème de Cayley donne un isomorphisme explicite Φ de H vers un sous-groupe de S_4. Trouver l'image de Φ.

b. En déduire que S_4 admet un sous-groupe V tel que $V \cong H$ et $V \neq H$.

c. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_4$ tel que $\sigma H \neq H\sigma$.

d. Montrer que $\sigma V = V\sigma$ pour tout $\sigma \in S_4$.

Exercice 5. Soient G un groupe, $H \leq G$ et $g \in G$. Montrer que $gH = H$ ssi $g \in H$.

Exercice 6. Soient G un groupe, $H \leq G$ et $a, b \in G$. Montrer que si $a \in Hb$, alors $Ha = Hb$.

Exercice 7. Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et $a, b, c \in G$. Montrer que si $(ab)H = (ac)H$, alors $bH = cH$.

Exercice 8. Soit G un groupe et a un élément dans G d'ordre fini. Montrer que l'ordre de a^k, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, divise l'ordre de a.

Exercice 9. Soit $m \geq 3$. Montrer que l'ordre du groupe $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^\times$ est pair.

Exercice 10. Soient G un groupe abélien fini d'ordre n et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{pgcd}(m,n) = 1$. Montrer que l'application $f(x) = x^m$ est un automorphisme de G.