Feuille d'exercices 8

Exercice 1. Voici une liste des éléments de A_4, où chaque permutation est exprimée comme un produit de cycles disjoints :

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon,\ (2,3,4),\ (2,4,3),\ (1,2)(3,4),\ (1,2,3),\ (1,2,4), \\ (1,3,2),\ (1,3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4,2),\ (1,4,3),\ (1,4)(2,3) \end{array} \right\}.$$

La démonstration du théorème de Cayley vue en classe donne un isomorphisme explicite Φ de A_4 vers un sous-groupe de S_{12}.

a. Montrer que l'image de $(1,2,3)$ par Φ, et par rapport à l'ordre donné des éléments de A_4, est la permutation

$$\Phi\left((1,2,3)\right) = (1,5,7)(2,4,8)(3,6,9)(10,11,12) \in S_{12}.$$

b. Calculer l'image de $(1,3)(2,4)$ par Φ.

c. Calculer l'image de $(2,4,3)$ par Φ.

d. Vérifier que $\Phi((1,2,3)) \circ \Phi((1,3)(2,4)) = \Phi((2,4,3))$.

Exercice 2. Soient G un groupe et $f : G \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes surjectif. Montrer que $[G : \ker(f)] = 2$.

Exercice 3. Soient n and m des entiers positifs. Montrer que $n!\,m!$ divise $(n+m)!$.
(*Indice : trouver un sous-groupe approprié de S_{n+m} et appliquer le théorème de Lagrange.*)

Exercice 4. Soient p et q des nombres premiers distincts. Soit G un groupe fini qui possède un élément d'ordre p et un élément d'ordre q. Montrer que l'ordre de G est un multiple de pq.

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre pq, où p et q sont des nombres premiers. Montrer que soit G est monogène, ou tout élément $x \in G$ tel que $x \neq e$ est d'ordre p ou d'ordre q.

Exercice 6. Soient G un groupe fini et p un nombre premier. Montrer que le nombre d'éléments d'ordre p dans G est un multiple de $p-1$.

Exercice 7. Pour tout entier n on définit

$$A_n = \{x \in \mathbb{Q} : n \leq x < n+1\}.$$

Montrer que $\{A_n : n \in \mathbb{Z}\}$ est une partition de $\mathbb{Q}$.

Exercice 8. Pour tout nombre réel r on définit

$$A_r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x - y = r\}.$$

Montrer que $\{A_r : r \in \mathbb{R}\}$ est une partition de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit G un groupe. Montrer que la relation

$$a \sim b \text{ ssi il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } a^k = b^k.$$

est une relation d'équivalence sur G et décrire la classe d'équivalence de l'élément neutre e.

Exercice 10. Soit G un groupe. Montrer que la relation

$$a \sim b \text{ ssi } xab^{-1} = ab^{-1}x \text{ pour tout élément } x \in G$$

est une relation d'équivalence sur G et décrire la classe d'équivalence de l'élément neutre e.

Exercice 11. Soit $f : A \to B$ une application entre deux ensembles. Montrer que la relation

$$a \sim b \text{ ssi } f(a) = f(b)$$

est une relation d'équivalence sur A et décrire les classes d'équivalence.

Exercice 12 ! (L'associativité d'une opération en termes de la table de l'opération.) Soit G un ensemble fini muni d'une opération $\circ$ qui admet un élément neutre noté $e \in G$. Montrer que $(G, \circ)$ est groupe ssi sa « table de l'opération » vérifie les conditions suivantes :

a. chaque ligne et chaque colonne contient tous les élémens de G une et une seule fois ;

b. si on a deux rectangles dans la table de la forme suivante,

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\circ & & a & & b & \\
\hline
 & & \vdots & & \vdots & \\
c & \cdots & e & \cdots & y & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
d & \cdots & x & \cdots & z & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c|ccccccc}
\circ & & a' & & b' & \\
\hline
 & & \vdots & & \vdots & \\
c' & \cdots & e & \cdots & y & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots & \\
d' & \cdots & x & \cdots & z' & \cdots \\
 & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

alors $z = z'$. Autrement dit, z (et z') ne dépend que de x et de y (il ne dépend pas de la position de l'élément neutre e, ni de la ligne qui contient e et y, ni de la colonne qui contient e et x, etc.).

(Voir http://en.wikipedia.org/wiki/Light%27s_associativity_test pour un algorithme efficace pour déterminer si un magma est associative.)

Exercice 13 ! Soit G un groupe fini dont l'élément neutre est noté e. Soit $\varphi : G \to G$ un isomorphisme tel que si $\varphi(g) = g$, alors $g = e$.

a. Montrer que tout élément de G s'exprime sous la forme $g^{-1}\varphi(g)$.

b. Si φ est d'ordre 2, montrer que $\varphi(g) = g^{-1}$ pour tout $g \in G$ et que G est un groupe abélien d'ordre impair.