Feuille d'exercices 9

Exercice 1. Soit a un élément d'un groupe G. Montrer que si $\sigma : G \to G'$ est un isomorphisme de groupes, alors $\operatorname{ordre}(a) = \operatorname{ordre}(\sigma(a))$.

Exercice 2. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes.

a. $H \triangleleft G$.

b. $gHg^{-1} = H$ pour tout $g \in G$.

c. $gHg^{-1} \subseteq H$ pour tout $g \in G$.

d. $ghg^{-1} \in H$ pour tous $g \in G$, $h \in H$.

Exercice 3. Soient $H \leq K \leq G$. Montrer que si $H \triangleleft G$, alors $H \triangleleft K$.

Exercice 4. Soit $H = \{(), (1,3)(2,4)\} \subseteq S_4$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de S_4 qui n'est pas normal dans S_4.

b. Montrer que H est un sous-groupe normal de $V = \{(), (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)\}$.

Exercice 5. Soit $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ muni de l'opération pour laquelle : 1 est l'élément neutre de Q ; $(-1)x = -x = x(-1)$ pour tout $x \in Q$; et $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Montrer que tout sous-groupe de Q est normal dans Q.

Exercice 6. Soit $\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1 ou -1. Montrer que $\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normal de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 7. Soit H un sous-groupe de G tel que $\varphi(H) = H$ pour tout automorphisme φ de G. Montrer que H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 8. Soit N un sous-groupe normal de G. Si $n = [G : N]$ est fini, montrer que $g^n \in N$ pour tout $g \in G$.

Exercice 9. Soit H un sous-groupe de $\mathbb{Q}$. Montrer que si $[\mathbb{Q} : H]$ est fini, alors $H = \mathbb{Q}$.

Exercice 10. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un groupe fini tel que $(xy)^n = x^n y^n$ pour tous $x, y \in G$. On définit deux sous-ensemble de G :

$$G^{(n)} = \{x^n : x \in G\} \qquad G_{(n)} = \{z \in G : z^n = e\}.$$

Montrer que $G_{(n)}$ et $G^{(n)}$ sont des sous-groupes normaux de G.

Exercice 11. Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Le *cœur de H dans G* est

$$H^{\heartsuit} = \bigcap_{g \in G} gHg^{-1}.$$

a. Montrer que $H^{\heartsuit}$ est un sous-groupe de G contenu dans H.

b. Montrer que $H^{\heartsuit}$ est normal dans G.

c. Montrer que si N est un sous-groupe normal de G tel que $N \subseteq H$, alors $N \subseteq H^{\heartsuit}$. (Autrement dit, $H^{\heartsuit}$ est le plus grand sous-groupe normal de G contenu dans H.)

d. En déduire que $H \triangleleft G$ ssi $H^{\heartsuit} = H$.