Devoir 1

à remettre le *lundi 7 octobre 2019*

Exercice 1. Soit A, B, C et D les matrices suivantes de $\mathrm{Mat}_{3\times 3}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soit $\mathcal{M} = \{A, B, C, D\}$ muni de la multiplication des matrices (notée $\times$).

a. Est-ce que $\mathcal{M}$ est stable pour $\times$?
b. Est-ce que $\times$ est associative dans $(\mathcal{M}, \times)$?
c. Est-ce que $\times$ est commutative dans $(\mathcal{M}, \times)$?
d. Est-ce que $(\mathcal{M}, \times)$ possède un élément neutre ? Si oui, identifier l'élément neutre.
e. Pour chaque élément inversible dans $(\mathcal{M}, \times)$, identifier son inverse.
f. Est-ce que $(\mathcal{M}, \times)$ est un groupe ?
g. Est-ce que $(\mathcal{M}, \times)$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$?

Exercice 2.

Soit α et β les deux permutations suivantes.

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a. Calculer les sous-groupes $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$, et $\langle \alpha, \beta \rangle$ de S_4.
b. Montrer que $\langle \alpha, \beta \rangle$ et $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ sont isomorphes.
c. Déterminer tous les homomorphismes de $\langle \alpha, \beta \rangle$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
Pour chaque homomorphisme, déterminer son noyau et son image.

Exercice 3.

Soit

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R},\, (a, b) \neq (0, 0) \right\}.$$

a. Montrer que G muni de la multiplication matricielle est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
b. Montrer que G est isomorphe au groupe multiplicatif des nombres complexes non nuls.

Exercice 4.

Soit G un groupe non abélien tel que tout sous-groupe propre de G est abélien. Montrer qu'il existe deux éléments a et b de G tels que $G = \langle \{a, b\} \rangle$.