Devoir 3

à remettre le *vendredi 6 décembre 2019*

Exercice 1. Soit M, N des sous-groupes normaux d'un groupe G tels que $N \cap M = \{e\}$. Montrer que $n\,m = m\,n$ pour tout $m \in M$ et pour tout $n \in N$.

Exercice 2. L'objectif de ce problème est de montrer le résultat suivant.

Si G est un groupe abélien *fini et*
si p est un nombre premier qui divise l'ordre de G,
alors G possède un élément d'ordre p.

En suivant les étapes ci-dessous, on montrera le résultat par récurrence sur l'ordre du groupe.

a. Montrer le cas de base de la récurrence.

b. Énoncer l'hypothèse de récurrence.

c. Soit x un élément de G et posons $m = \text{ordre}(x)$. Montrer que si p divise m, alors une certaine puissance de x est un élément d'ordre p dans G.

d. Alors, on peut supposer que p ne divise pas m. Montrer que p divise $|G/H|$, où $H = \langle x \rangle$.

e. En déduire que G/H possède un élément d'ordre p. Notons cet élément par yH.

f. Montrer que l'ordre de y est un multiple de p.

g. En déduire qu'une certaine puissance de y est un élément d'ordre p dans G.

Exercice 3. Soit $(G, *)$ et $(G', \star)$ des groupes. On note par $G \times G'$ le groupe

$$G \times G' = \big\{(g, g') : g \in G, g' \in G\big\}$$

muni de la loi de composition suivante :

$$\big(g_1, g_1'\big) \bullet \big(g_2, g_2'\big) = \big(g_1 * g_2,\ g_1' \star g_2'\big).$$

(Il n'est pas nécessaire de montrer que $G \times G'$ est un groupe.)

a. Dresser la table d'opération de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; en déduire qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

b. Expliquer pourquoi $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ n'est pas monogène et donner deux éléments qui engendrent le groupe.

c. Soit M, N des sous-groupes normaux d'un groupe G. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow G/M \times G/N \\ g &\longmapsto (gM, gN) \end{aligned}$$

est un morphisme de groupes et en déduire que

$$G/(M \cap N) \text{ est isomorphe à un sous-groupe de } G/M \times G/N.$$