Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}$ muni de l'opération $a * b = ab + a + b$.

a. Est-ce que $*$ est associative ?

b. Est-ce que $*$ est commutative ?

c. Est-ce que $(\mathbb{R}, *)$ possède un élément neutre ?

d. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}$ sont stables pour $*$ (*rappel* : S est stable pour $*$ si $a * b \in S$ pour tous $a, b \in S$) ?

- $S = \mathbb{N}$ (nombres naturels—y compris 0)
- $S = \mathbb{Q}^-$ (nombres rationnels negatifs)
- $S = (\mathbb{Q}^+)^*$ (nombres rationnels positifs et non nul)
- $S = \mathbb{R}$ (nombres réels)
- $S = n\mathbb{Z}$ (multiples entier de $n \in \mathbb{N}$)

Exercice 2. Soit $E = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ muni de l'opération $A \star B = AB + I_n$, où I_n est la matrice identité $n \times n$.

a. Déterminer si $*$ est associative ?

b. Déterminer si $*$ est commutative ?

c. Existe-t-il un élément neutre pour $*$?

Exercice 3. Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{P}(\mathsf{E})$ l'ensemble des sous-ensembles de E. Si A et B sont deux sous-ensembles de E, on définit

$$A \,\Delta\, B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Par exemple, si $\mathsf{E} = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathcal{P}(\mathsf{E}) = \Big\{ \{\},\quad \{a\},\quad \{b\},\quad \{c\},\quad \{a,b\},\quad \{a,c\},\quad \{b,c\},\quad \{a,b,c\} \Big\},$$

et on obtient la table à la page suviante.

a. Expliquer pourquoi Δ est une opération sur $\mathcal{P}(\mathsf{E})$.

b. Expliquer pourquoi Δ est une opération associative sur $\mathcal{P}(\mathsf{E})$.

c. Identifier un élément neutre pour $(\mathcal{P}(\mathsf{E}), \Delta)$.

d. Expliquer pourquoi $(\mathcal{P}(\mathsf{E}), \Delta)$ est un groupe.

e. Déterminer si Δ est commutative sur $\mathcal{P}(\mathsf{E})$.

f. Est-ce que ses propriétés sont valables pour tout ensemble fini E ?

Δ	$\{\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\{\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$
$\{b\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$	$\{\}$	$\{b,c\}$	$\{a\}$	$\{a,b,c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$
$\{c\}$	$\{c\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{a,b,c\}$	$\{\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$
$\{a,c\}$	$\{a,c\}$	$\{c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{a\}$	$\{b,c\}$	$\{\}$	$\{a,b\}$	$\{b\}$
$\{b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{\}$	$\{a\}$
$\{a,b,c\}$	$\{a,b,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,c\}$	$\{a,b\}$	$\{c\}$	$\{b\}$	$\{a\}$	$\{\}$

Règles de calcul

Exercice 4. Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e. Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux. S'il est vrai, expliquer pourquoi il est vrai. S'il est faux, donner un contre-exemple. *(Indice : consultez les tables de multiplication calculées en classe.)*

a. Si $x \in G$ et $x^2 = e$, alors $x = e$.

b. Si $x \in G$ et $x^2 = x$, alors $x = e$.

c. Si $x, a \in G$ et $x^2 = a^2$, alors $x = a$.

d. Pour tous $a, b \in G$, on a $(ab)^2 = a^2b^2$.

e. Pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x = y^2$.

f. Pour tous $x, y \in G$, il existe un élément $z \in G$ tel que $y = xz$.

Exercice 5. Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e. Si a et b sont des éléments de G tel que $a^5 = e$ et $a^3b = ba^3$, montrer que

$$a^6b = ba^6 \qquad \text{et} \qquad ab = ba.$$

Exercice 6. Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e. Montrer que si $x^2 = e$ pour tout $x \in G$, alors G est un groupe abélien (commutatif).