Feuille d'exercices 10

Exercice 1. Soit $\mathbb{R}^*$ le groupe multiplicatif de nombres réels non nuls et $\mathbb{R}_{>0}$ le groupe multiplicatif de nombres réels strictement positifs. Montrer que $\mathbb{R}^*/\{1,-1\} \cong \mathbb{R}_{>0}$.

(Indice: appliquer le premier théorème d'isomorphisme à la fonction $\varphi(x) = |x|$.)

Exercice 2. Soit G un groupe abélien, n un entier non nul et

$$G^{(n)} = \{x^n : x \in G\} \qquad \text{et} \qquad G_{(n)} = \{z \in G : z^n = e\}.$$

Montrer que $G/G_{(n)} \cong G^{(n)}$.

(Indice: appliquer le premier théorème d'isomorphisme à la fonction $\varphi(g) = g^n$.)

Exercice 3. Soit G le groupe

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} : b \in \mathbb{R} \text{ tels que } a, d \neq 0 \right\}$$

où l'opération de G est la multiplication de matrices et

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x^{-1} \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R}^* \right\}.$$

a. Montrer que N est un sous-groupe normal dans G.

b. Montrer que les matrices suivantes

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & ad \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \qquad (a, d \neq 0)$$

appartiennent à la même classe à gauche modulo N.

c. En déduire que

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} N * \begin{bmatrix} a' & b' \\ 0 & d' \end{bmatrix} N = \begin{bmatrix} aa' & 0 \\ 0 & dd' \end{bmatrix} N,$$

où $*$ est la loi de composition dans G/N.

d. Montrer que G/N est isomorphe à $\mathbb{R}$.