Feuille d'exercices 11

Groupes quotients

Exercice 1. Soit H un sous-groupe normal dans G. Montrer que si H est monogène, alors tout sous-groupe de H est un sous-groupe normal dans G.

Exercice 2. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Montrer que $a^2 \in H$ pour tout $a \in G$ ssi tout élément de G/H est son propre inverse.

Exercice 3. Soit G un groupe abélien, p un nombre premier, et H l'ensemble des éléments de G dont l'ordre est une puissance de p :

$$H = \Big\{ g \in G : \text{ordre}(g) = p^\alpha \text{ pour un certain } \alpha \in \mathbb{Z} \Big\}.$$

a. Montrer que H est un sous-groupe normal dans G.

b. Montrer que G/H ne possède aucun élément dont l'ordre est p^α avec $\alpha \neq 0$.

Théorèmes d'isomorphisme

Exercice 4. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/Z \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm I_2\}$, où $Z = \{aI_2 : a \in \mathbb{C}^*\}$, et décrire explicitement l'isomorphisme.

(Indice: Poser $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, $H = \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ et $N = Z$ dans le deuxième théorème d'isomorphisme.)

Exercice 5. Soit G un groupe fini et $H \triangleleft G$ tel que $\mathrm{pgcd}(|H|, [G : H]) = 1$. Montrer que H est l'unique sous-groupe de G d'ordre $|H|$.

(Indice: Deuxième théorème d'isomorphisme ; ou le théorème de correspondance.)

Exercice 6. Soit $C_{18} = \{e, x^1, x^2, \ldots, x^{14}\}$ le groupe monogène engendré par un élément x d'ordre 18, et $C_6 = \{e, y^1, \ldots, y^5\}$ le groupe monogène engendré par un élément y d'ordre 6. On définit $\varphi : C_{18} \to C_6$ par $\varphi(x^i) = y^i$.

a. Montrer que φ est un morphisme de groupes.

b. Calculer $\ker(\varphi)$.

c. En déduire que $C_{18}/\{e, x^6, x^{12}\} \cong C_6$.

d. Déterminer les sous-groupes de C_6.

e. Déterminer les sous-groupes de C_{18} contenant $\ker(\varphi)$.

f. Calculer $\varphi(H)$ pour chaque sous-groupe H de C_{18} contenant $\ker(\varphi)$, et comparer avec les sous-groupes de C_6.