Feuille d'exercices 12

Ordre d'un élément dans un produit cartésien des groupes

Exercice 1. Soit $G_1, G_2, \ldots, G_r$ des groupes. Montrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ appartient au produit direct $G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_r$, alors

$$\operatorname{ordre}\big((x_1, x_2, \ldots, x_r)\big) = \operatorname{ppcm}\Big(\operatorname{ordre}(x_1), \operatorname{ordre}(x_2), \ldots, \operatorname{ordre}(x_r)\Big).$$

Décomposition « primaire » d'un groupe abélien fini

Exercice 2. Selon un résultat du cours, on a que si G est un groupe abélien d'ordre $p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$, avec $p_1, \ldots, p_k$ des premiers distincts, alors G est isomorphe à $G(p_1) \times \cdots \times G(p_k)$, où

$$G(p_i) = \{g \in G : \operatorname{ordre}(g) \text{ est une puissance de } p_i\}.$$

Posons $G = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

a. Donner la liste des éléments de $G(2)$.

b. Donner la liste des éléments de $G(3)$.

c. Décomposer $G(2)$ en produit directe de deux sous-groupes H et K.

d. En déduire que $G \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

Actions de groupes

Exercice 3. Soit H et K deux sous-groupes d'un groupe fini G. On définit, pour tout $(h,k) \in H \times K$ et pour tout $x \in HK$,

$$(h,k) \bullet x = hxk^{-1}$$

Vérifier que cela est une action du groupe $H \times K$ sur l'ensemble HK.

Exercice 4. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E tel que l'action possède une et une seule orbite. Soit $x, y \in E$.

a. Montrer que $\{g \in G : g \bullet x = y\}$ est un classe à gauche de $\operatorname{Stab}_G(x)$.

b. Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G/\operatorname{Stab}_G(x) \\ y & \longmapsto & \{g \in G : g \bullet x = y\} \end{array}$$

est une bijection.

Équations aux classes

Exercice 5. Soit G un groupe fini d'ordre 21 agissant sur un ensemble E.

a. Expliquer pourquoi la cardinalité d'une orbite de cette action est 1, 3, 7 ou 21.

b. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note n_i le nombre d'orbites à i éléments. Montrer que
$$|E| = n_1 + 3n_3 + 7n_7 + 21n_{21}.$$

c. Montrer que si $|E| = 11$, alors il y a au moins un point fixe pour l'action de G sur E.

d. On suppose que $|E| = 19$ et qu'il n'y a pas de point fixe pour l'action de G sur E. Calculer le nombre d'orbites dans E sous l'action de G.

Applications

Exercice 6. Soit G un groupe fini non trivial dont l'élément neutre est noté e, p un nombre premier quelconque, et
$$E = \Big\{ \big(g_1, g_2, \ldots, g_p\big) : g_1, g_2, \ldots, g_p \in G \text{ et } g_1 g_2 \cdots g_p = e \Big\}.$$

a. Montrer que $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ agit sur E par
$$i \bullet \big(g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, \ldots, g_p\big) = \big(g_{i+1}, g_{i+2}, \ldots, g_p, g_1, g_2, \ldots, g_{i-1}, g_i\big)$$
pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, p\}$.

b. Montrer que l'ensemble de points fixes pour l'action de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sur E est
$$\mathrm{Fix}_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}(E) = \Big\{ \underbrace{(g, g, \ldots, g)}_{p \text{ copies}} : g \in G \text{ et } g^p = e \Big\}.$$

c. Montrer que la cardinalité de E est $|G|^{p-1}$.

d. En déduire que
$$|G|^{p-1} \equiv |\{g \in G : g^p = e\}| \pmod{p}. \tag{1}$$

Exercice 7. Déduire le *théorème de Cauchy* à partir (1).

Théorème de Cauchy : Si G est un groupe fini non trivial et p est un nombre premier qui divise $|G|$, alors il existe un élément d'ordre p dans G.

Exercice 8. Déduire à partir de (1) (avec $G = S_p$, le groupe symétrique) :

Théorème de Wilson : Si p est un nombre premier, alors $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$.