

Feuille d'exercices 13

Exercice 1. Pour chaque énoncé, déterminer s'il est vrai ou faux (et justifier les réponses).

- a. Si x est un élément d'ordre 12 dans un groupe G , alors x^8 est d'ordre 3.
- b. $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.
- c. Si H est un sous-groupe abélien de G , alors H est un sous-groupe normal de G .
- d. Si G est un groupe fini agissant sur un ensemble E , alors $|\text{Orb}_G(x)|$ divise $|G|$ pour tout $x \in E$.
- e. Si G est un groupe d'ordre 49 agissant sur un ensemble E de cardinalité 2019, alors l'action de G sur E n'admet pas de points fixes.

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre $476 = 2^2 \cdot 7 \cdot 17$.

- a. Montrer que G possède un sous-groupe abélien d'ordre 4.
- b. Montrer que G possède un sous-groupe normal d'ordre 7 et un sous-groupe normal d'ordre 17.
- c. Soit H le sous-groupe de Sylow de G pour le premier 7, et K le sous-groupe de Sylow de G pour le premier 17. Montrer que HK est un sous-groupe de G qui est d'ordre 119, *normal* et *monogène*.