Feuille d'exercices 2

Exemples des groupes

Exercice 1. Montrer que l'ensemble

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

muni de la multiplication des matrices est un groupe.

Exercice 2. Soit $H = \{2^k : k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $(H, \times)$ est un groupe.

Exercice 3. Soit X un ensemble, $f : X \to X$ une bijection de X dans X, et $G = \{f^k : k \in \mathbb{Z}\}$ où $f^1 = f, f^2 = f \circ f, f^3 = f \circ f \circ f$, etc. Montrer que $(G, \circ)$ est un groupe.

Exercice 4. Soit G le produit cartesien d'ensembles $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{Z}$. On définit une opération sur G par

$$(a, m) * (b, n) = (ab, m + n)$$

où $a, b \in \mathbb{R}^*$ et $m, n \in \mathbb{N}$. Montrer que G muni de l'opération $*$ est un groupe.

Groupes d'isométries

Exercice 5. Soit R le rectangle situé dans $\mathbb{R}^2$ à sommets $(2, 1)$, $(2, -1)$, $(-2, -1)$ et $(-2, 1)$. Soit E l'ensemble des isométries de R (il y a 4 isométries).

a. Dresser la table de $(E, \circ)$.

b. Montrer que $(E, \circ)$ est un groupe.

c. Dresser la table de $(\{1, -1, i, -i\}, \times)$, où i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

d. Comparer les deux tables.

Exercice 6.

a. Donner deux éléments x et y du groupe des isométries du triangle équilatéral tels que $(xy)^2 \neq x^2y^2$.

b. Soit G un groupe tel que $(xy)^2 = x^2y^2$ pour tous $x, y \in G$. Montrer que G est un groupe abélien.

Groupes symétriques (notation à deux lignes)

Exercice 7. Calculer les produits suivants dans le groupe symétrique S_8.

$$a.\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&7&5&4&2&6&3&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\5&2&1&4&6&3&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&\cdots&&&&&&\end{pmatrix}$$

$$b.\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\7&1&8&5&2&3&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&1&7&5&4&6&3&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&\cdots&&&&&&\end{pmatrix}$$

$$c.\ \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&3&5&4&2&6&7&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&2&3&6&5&7&1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&\cdots&&&&&&\end{pmatrix}$$

Exercice 8. Considérons les trois permutations suivantes de S_7 :

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\4&7&2&5&1&6&3\end{pmatrix}\quad \tau=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\6&1&7&2&3&4&5\end{pmatrix}\quad \gamma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&6&7&2&5&1&4\end{pmatrix}$$

a. Calculer σ^{-1}, τ^{-1}, γ^{-1}.

b. Calculer $\sigma^2, \sigma^3, \sigma^4, \sigma^5, \sigma^6, \sigma^7$. Donner une formule pour σ^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c. Trouver la plus petite puissance $n > 0$ telle que

$$\tau^n=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\1&2&3&4&5&6&7\end{pmatrix}.$$

Varia

Exercice 9. Soit G un groupe qui contient un nombre pair d'éléments. Montrer qu'il existe un élément $g \in G$ tel que $g^2 = e$ et $g \neq e$.

Exercice 10. Soit E un ensemble et $*$ une opération sur E telle que $(a * b) * a = b$ pour tous $a, b \in E$. Montrer que $a * (b * a) = b$ pour tous $a, b \in E$.

(*Indice: l'opération n'est pas forcément associative*)

Exercice 11. Soit $*$ une opération associative et commutative sur un ensemble E. Supposons que pour tous $x, y \in E$, il existe $z \in E$ tel que $x * z = y$. Montrer que $(E, *)$ est un groupe.