Feuille d'exercices 3

Permutations paires et impaires

Exercice 1.

a. Écrire chaque permutation dans S_3 comme produit de cycles disjoints.

b. Écrire chaque permutation dans S_3 comme produit de transpositions adjacentes.

c. Identifier les permutations paires et impaires du groupe S_3.

Exercice 2. Considérons les trois permutations suivantes de S_7 :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 7 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 7 & 2 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

a. Écrire σ, τ, et γ comme :

- produit de cycles disjoint ;
- produit de transpositions ;
- produit de transpositions adjacentes ;
- produit de transpositions adjacentes de deux façons différentes.

b. Écrire σ^{-1}, τ^{-1}, et γ^{-1} comme :

- produit de cycles disjoint ;
- produit de transpositions ;
- produit de transpositions adjacentes ;
- produit de transpositions adjacentes de deux façons différentes.

c. Déterminer si σ, τ, γ, σ^{-1}, τ^{-1}, γ^{-1} sont des permutations paires ou impaires.

Exercice 3.

a. Montrer que le produit de deux permutations paires est une permutation paire.

b. Montrer que le produit de deux permutations impaires est une permutation paire.

c. Montrer que le produit d'une permutation paire et d'une permutation impaire est une permutation impaire.

d. Montrer que l'inverse d'une permutation paire est une permutation paire.

e. Montrer que l'inverse d'une permutation impaire est une permutation impaire.

Produit de transpositions

Exercice 4. Soit x, a, b, c des éléments distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que dans S_n on a

$$\begin{aligned} (x,\, b)(x,\, a) &= (x,\, a)(a,\, b) \\ (c,\, a)(x,\, a) &= (x,\, c)(c,\, a) \\ (b,\, c)(x,\, a) &= (x,\, a)(b,\, c) \\ (x,\, a)(x,\, a) &= \varepsilon \end{aligned}$$

où ε est la permutation identité.

Exercice 5. Soit $a_1, \ldots, a_p$ des élément distincts de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que dans le groupe symétrique S_n on a que

$$(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a_1, a_p)(a_1, a_{p-1}) \cdots (a_1, a_2).$$

Exercice 6. Montrer que toute permutation de S_n se décompose en produit des permutations suivantes :

a. $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, …, $(1, n)$. *(Indice :* $(a_1, a_2, \ldots, a_p) = (a_1, a_p)(a_1, a_{p-1}) \cdots (a_1, a_2)$.*)*

b. $(1, 2)$, $(1, 2, 3, \ldots, n)$.

c. $(1, 2)$, $(2, 3, \ldots, n)$.

Sous-groupes

Exercice 7. Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-groupes de S_4.

$$\begin{aligned} A &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3\} \\ B &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(2) = 2\} \\ C &= \{\sigma \in S_4 : \sigma(1) = 3 \text{ et } \sigma(2) = 2\}\,. \end{aligned}$$

Exercice 8. Soit H l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & c \end{smallmatrix}\right)$ et soit K l'ensemble des matrices de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de la forme $\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.

b. Montrer que K est un sous-groupe H.

c. Montrer que K est isomorphe à $\mathbb{R}$ muni de l'addition.

On dit qu'un élément x d'un groupe est d'*ordre* n si $x^n = e$ et $x^m \neq e$ pour tout $0 < m < n$.

d. Déterminer les éléments d'ordre 2 dans H.

e. Trouver deux éléments A et B d'ordre 2 dans H tels que l'ordre de AB est infini.