Feuille d'exercices 4

Ordre d'un élément

Exercice 1. Soit a et b les matrices suivantes de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$.

$$a = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

a. Montrer que $\mathrm{ordre}(a) = 4$ et $\mathrm{ordre}(b) = 3$.

b. Montrer que $\mathrm{ordre}(ab) = \infty$. En déduire que le sous-groupe $H = \langle\{a, b\}\rangle$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ est d'ordre infini.

Exercice 2. Soit a un élément d'ordre 12 dans un groupe G.

a. Trouver le plus petit entier positif k tel que $a^{8k} = e$.

b. Déterminer l'ordre de a^8, a^9, a^{10}, a^5.

c. Trouver tous les entier j tels que $\mathrm{ordre}(a^j) = \mathrm{ordre}(a)$.

Exercice 3. Soit G un groupe et $x \in G$. Montrer que :

a. Si $\mathrm{ordre}(x) = \infty$, alors $\mathrm{ordre}(x^k) = \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

b. Si $\mathrm{ordre}(x) = n$ est fini et si $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, alors $\mathrm{ordre}(x^k) = n/\operatorname{pgcd}(n, k)$.

Exercice 4. Soit G un groupe et $a \in G$. Montrer que si k est un entier strictement positif tel que $a^k = e$, alors $\mathrm{ordre}(a)$ divise k.

(*Indice: écrire* $k = q\,\mathrm{ordre}(a) + r$ *avec* $0 \leq r < \mathrm{ordre}(a)$)

Exercice 5. Soit G est un groupe *abélien fini*. Notons les éléments de G par $g_1, g_2, \dots, g_n$.

a. Soit $a \in G$. Montrer que les éléments $ag_1, ag_2, \dots, ag_n$ sont distincts.

b. Montrer que $G = \{ag_1, ag_2, \dots, ag_n\}$ pour tout $a \in G$.

c. Montrer que $a^{|G|} = e$ pour tout $a \in G$.

d. En déduire que $\mathrm{ordre}(a)$ divise l'ordre de G.

(*Indice: Pour la partie (c), considérer le produit de tous les éléments de* G)

Morphismes de groupes

Exercice 6. Montrer que l'application f donnée est un morphisme de groupes et déterminer les éléments x vérifiant $f(x) = e$.

a. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(x) = 1/x$.

b. $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$ définie par $f(z) = |z|$.

c. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*$ définie par $f(x) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Rappel :

- $\mathbb{R}^*$ est le groupe multiplicatif de nombre réels non nuls ;
- $\mathbb{R}$ est le groupe additif de nombre réels ;
- $\mathbb{C}^*$ est le groupe multiplicatif de nombre réels non nuls.

Exercice 7. *(Dans ce problème, « e » ne signifie pas l'élément neutre d'un groupe.)* Montrer que l'application exponentielle $x \mapsto e^x$ est un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}_{>0}, \times)$, où $\mathbb{R}_{>0}$ est l'ensemble de nombres réels strictement postitifs.

Exercice 8. Montrer que l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = iz$ est un isomorphisme de groupe qui vérifie $f(-z) = f^{-1}(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 9. Soit G un groupe et $x \in G$. Montrer que :

a. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, alors $\text{ordre}(f(x)) \leq \text{ordre}(x)$.

b. Si $f : G \to G'$ est un homomorphisme de groupes, alors $\text{ordre}(f(x))$ divise $\text{ordre}(x)$.

Exercice 10. Soit $f : G \to G'$ un morphisme de groupes et H un sous-groupe de G'. Montrer que l'ensemble $f^{-1}(H) = \{a \in G : f(a) \in H\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 11 ! Soit D un groupe d'ordre $2n$, où n est impair, et H un sous-groupe de G d'ordre n tel que $xhx^{-1} = h^{-1}$ pour tout $h \in H$ et tout $x \in D \setminus H$.

a. Montrer que H est abélien.

b. Montrer que tout élément de $D \setminus H$ est d'ordre 2.

(*Indice: Montrer que si $x \in D \setminus H$, alors $x^2 \in H$. Puis, considérer l'ordre de x^2.*)