Feuille d'exercices 5

Exercice 1.

a. Montrer que les groupes $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes.

b. Montrer que les groupes multiplicatifs $(\mathbb{R}^\times, \times)$ et $(\mathbb{C}^\times, \times)$ ne sont pas isomorphes.

c. Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}, +)$ et $(\mathbb{Q}, +)$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 2.

a. Existe-t-il un morphisme de groupes surjectif $f : \mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$?

b. Existe-t-il un morphisme de groupes injectif $f : \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$?

Exercice 3.

a. Soit a un élément *non nul* de $\mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$. Montrer que $\langle a \rangle = \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$.

b. Soit G' un groupe et $f : \mathbb{Z}/31\mathbb{Z} \to G'$ un morphisme de groupes non trivial. Montrer que f est injectif.

c. Soit G un groupe et $g : G \to \mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$ un morphisme de groupes non trivial. Montrer que g est surjectif.

Exercice 4. Soit G un groupe abélien fini d'ordre n et soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\operatorname{pgcd}(m, n) = 1$. Montrer que la fonction définie par $f(x) = x^m$ pour tout $x \in G$ est un automorphisme de G.

Exercice 5. Montrer que le groupe symétrique S_3 est isomorphe à $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, où $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ est le groupe de matrices inversibles de taille 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit $f : G \to G'$ et $g : G' \to G''$ deux morphismes de groupes.

a. Montrer que la composition $g \circ f$ est un morphisme de groupes de G dans G''.

b. En déduire que l'ensemble de morphismes de groupes de G dans G est un monoide.

c. En déduire que l'ensemble d'automorphismes de G est un groupe.

(*Rappel: Un* automorphisme *d'un groupe G est un* isomorphisme *de G dans G.*)

d. Montrer que le groupe d'automorphismes de $(\mathbb{Z}/8\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe à S_3.

Exercice 7. Soit $f : G \to H$ et $g : H \to K$ des morphismes de groupes. Montrer que $g \circ f$ est trivial ssi $\operatorname{im}(f) \subseteq \ker(g)$.

Exercice 8. Montrer que si $f : G \to H$ est un morphisme de groupes injectif et si H est abélien, alors G est abélien.

Exercice 9. Soit $G = \langle a \rangle$ un groupe monogène d'ordre fini. On considère la fonction

$$f : \mathbb{Z} \to G$$

définie par $f(k) = a^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

a. Montrer que f est une morphisme de groupes surjectif.

b. Montrer que $\ker(f) = n\mathbb{Z}$, où $n = \text{ordre}(a)$.

Exercice 10.

a. Soit X une partie non vide de S_n qui est stable pour l'opération de S_n.
Montrer que X est un sous-groupe de S_n.

b. Est-ce vrai pour une partie non vide d'un groupe G quelconque ?

Exercice 11 ! Soit G un groupe.

a. Montrer que $Z(G) = \{a \in G : ab = ba \text{ pour tout } b \in G\}$ est un sous-groupe de G.

b. Soit H un sous-groupe de G tel que si H' est un sous-groupe non trivial de G, alors $H \subseteq H'$. Montrer que $H \subseteq Z(G)$.