Feuille d'exercices 6

Exercice 1. Soit G un groupe agissant sur un ensemble X, $g \in G$ et $x, x' \in X$.

a. Montrer que si $x' = g \cdot x$, alors $x = g^{-1} \cdot x'$.

b. Montrer que si $x \neq x'$, alors $g \cdot x \neq g \cdot x'$.

Exercice 2. Soit H le sous-groupe de S_4 engendré par les transpositions $(1,2)$ et $(3,4)$. On fait agir H sur l'ensemble $\{1,2,3,4\}$. Déterminer les orbites et les stabilisateurs pour cette action.

Exercice 3. Soit le sous-groupe de S_5

$$G = \Big\{\varepsilon,\ \ (1\,5\,3),\ \ (1\,3\,5),\ \ (2\,4),\ \ (1\,5\,3)(2\,4),\ \ (1\,3\,5)(2\,4)\Big\}.$$

On fait agir G sur l'ensemble $E = \{1,2,3,4,5\}$.

a. Déterminer l'orbite de chaque élément de E.

b. Déterminer le stabilisateur de chaque élément de E.

Exercice 4. Soit

$$G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \text{ et } ac \neq 0 \right\}.$$

a. Montrer que G agit sur $\mathbb{R}$ par l'opération

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \bullet x = \frac{ax+b}{c}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Déterminer l'orbite de 0 et le stabilisateur de 0 pour cette action.

c. Donner une bijection entre $\mathrm{Orb}_G(0)$ et $G/\operatorname{Stab}_G(0) = \{g \operatorname{Stab}(0) : g \in G\}$.

Exercice 5. Soit G un groupe, H un sous-groupe de G, et $g \in G$. Posons

$$gHg^{-1} = \left\{ghg^{-1} : h \in H\right\}.$$

a. Montrer que gHg^{-1} est un sous-groupe de G. *(Dans ce cas, on dit que H et gHg^{-1} sont des sous-groupes* conjugués.*)*

b. Montrer que $g \cdot H = gHg^{-1}$ est une action de G sur l'ensemble de sous-groupes de G.

Exercice 6. On fait agir S_4 sur les sous-groupes de S_4 par conjugaison. Explicitement, si H est un sous-groupe de S_4 et $\sigma \in S_4$, alors

$$\sigma \cdot H = \left\{ \sigma h \sigma^{-1} : h \in H \right\}.$$

a. Montrer que

$$\{\varepsilon, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon, (2,1,3,4), (2,3)(1,4), (2,4,3,1)\}$$

appartiennent à la même orbite.

b. Est-ce que le sous-groupe $\{\varepsilon, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$ appartient à l'orbite de la partie précédente ?

Exercice 7. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E.

a. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $g \in G$ on a

$$g \operatorname{Stab}_G(x)\, g^{-1} = \operatorname{Stab}_G(g \cdot x).$$

b. Soit H un sous-groupe de G. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $g \in G$ on a

$$g \operatorname{Stab}_H(x)\, g^{-1} = \operatorname{Stab}_{gHg^{-1}}(g \cdot x).$$

Exercice 8. Soit G un groupe agissant sur un ensemble E. Montrer que pour tous $x, y \in E$, si $\operatorname{Orb}_G(x) = \operatorname{Orb}_G(y)$, alors $\operatorname{Stab}_G(x)$ et $\operatorname{Stab}_G(y)$ sont des sous-groupes conjugués.