Feuille d'exercices 7

Théorème de Cayley

Exercice 1. Voici une liste des éléments de A_4, où chaque permutation est exprimée comme un produit de cycles disjoints :

$$A_4 = \left\{ \begin{array}{c} \varepsilon,\ (2,3,4),\ (2,4,3),\ (1,2)(3,4),\ (1,2,3),\ (1,2,4), \\ (1,3,2),\ (1,3,4),\ (1,3)(2,4),\ (1,4,2),\ (1,4,3),\ (1,4)(2,3) \end{array} \right\}.$$

La démonstration du théorème de Cayley vue en classe donne un isomorphisme explicite Φ de A_4 vers un sous-groupe de S_{12}.

a. Montrer que l'image de $(1,2,3)$ par Φ, et par rapport à l'ordre donné des éléments de A_4, est la permutation

$$\Phi\left((1,2,3)\right) = (1,5,7)(2,4,8)(3,6,9)(10,11,12) \in S_{12}.$$

b. Calculer l'image de $(1,3)(2,4)$ par Φ.

c. Calculer l'image de $(2,4,3)$ par Φ.

d. Vérifier que $\Phi((1,2,3)) \circ \Phi((1,3)(2,4)) = \Phi((2,4,3))$.

Exercice 2. Soit H le sous-groupe suivant du groupe symétrique S_4 :

$$H = \Big\{\varepsilon,\ (1,2),\ (3,4),\ (1,2)(3,4)\Big\}.$$

a. La démonstration vue en classe du théorème de Cayley donne un isomorphisme explicite Φ de H vers un sous-groupe de S_4. Trouver l'image $\Phi(H)$.

b. En déduire que S_4 admet un sous-groupe V tel que $V \cong H$ et $V \neq H$.

c. Montrer qu'il existe $\sigma \in S_4$ tel que $\sigma H \neq H\sigma$.

d. Posons $V = \Phi(H)$. Montrer que $\sigma V = V\sigma$ pour tout $\sigma \in S_4$.

Exercice 3. Soit F le groupe de 6 fonctions remarquables de $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$:

$$F = \left\{x, \quad \frac{1}{1-x}, \quad \frac{x-1}{x}, \quad 1-x, \quad \frac{1}{x}, \quad \frac{x}{x-1}\right\}.$$

a. Trouver un sous-groupe de S_6 isomorphe à F.

b. Noter que F est un groupe non-abélien, donc il est isomorphe à S_3, le groupe d'isométries d'un triangle équilatéral. Trouver trois objets dans $\mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ qui sont permutés par les fonctions dans F.

Classes modulo un sous-groupe

Exercice 4. Déterminer les classes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ modulo le sous-groupe engendré par 3.

Exercice 5. Soit H le sous-groupe de S_3 engendré par la transposition $(1\,2)$.

a. Déterminer les classes à gauche modulo H et donner un représentant de chaque classe.

b. Déterminer les classes à droite modulo H et donner un représentant de chaque classe.

c. Déterminer si H est un sous-groupe normal de S_3.

Exercice 6. Soit G un groupe, $H \leq G$ et $g \in G$. Montrer que $gH = H$ ssi $g \in H$.