Feuille d'exercices 8

Critère de divisibilité

Exercice 1.

a. Montrer qu'un nombre est divisible par 11 ssi le résultat de la soustraction du nombre de dizaines par le chiffre des unités est multiple de 11.

Par exemple, pour 5786 le chiffre des unités est 9, le nombre de dizaines est 578, d'où on calcul :

$$\underbrace{578}_{\text{(nombre de dizaines)}} - \underbrace{6}_{\text{(chiffre des unités)}} = 572.$$

Donc, 11 divise 5786, car 11 divise $572 = 52 \times 11$.

b. Montrer qu'un nombre est divisible par 13 ssi le résultat de la somme du nombre de dizaines et 4 fois le chiffre des unités est multiple de 13.

Par exemple, pour déterminer si 13 divise 351 on calcul

$$\underbrace{35}_{\text{(nombre de dizaines)}} + \underbrace{\mathbf{4} \times 1}_{\text{(4 fois le chiffre des unités)}} = 39; \quad \text{ce qui est divisible par } 13.$$

c. Montrer qu'un nombre est divisible par 7 ssi le résultat de la soustraction du nombre de dizaines par le double du chiffre des unités est multiple de 7.

Par exemple, pour déterminer si 7 divise 5789 on calcul

$$\underbrace{578}_{\text{(nombre de dizaines)}} - \underbrace{\mathbf{2} \times 9}_{\text{(double du chiffre des unités)}} = 560.$$

Comme $560 = 7 \times 80$ est un multiple de 7, on a que 5789 est divisible par 7.

d. En déduire qu'un nombre est divisible par 7 ssi le résultat de la somme du nombre de dizaines et 5 fois le chiffre des unités est multiple de 7.

Par exemple, pour déterminer si 623 est divisible par 7, on calcul

$$\underbrace{62}_{\text{(nombre de dizaines)}} + \underbrace{\mathbf{5} \times 3}_{\text{(cinq fois le chiffre des unités)}} = 77.$$

e. En itérant les critères, déterminer si 42 341 530 est divisible par 7.

Théorème de Lagrange

Exercice 2. Soit G un groupe d'ordre pq, où p et q sont des nombres premiers. Montrer que soit G est monogène soit tout élément $x \in G$ tel que $x \neq e$ est d'ordre p ou d'ordre q.

Exercice 3. Soit G un groupe d'ordre nm où $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Montrer que si G possède un élément a d'ordre n et un élément b d'ordre m, alors $G = \{a^i b^j : 0 \leq i < n, 0 \leq j < m\}$.

(*Indice: Montrer que les éléments $a^i b^j$ sont distincts.*)

Sous-groupe normal

Exercice 4. Soit $\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n \times n$ de déterminant 1 ou -1. Montrer que $\mathrm{SL}_n^{\pm}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe normal dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 5. Soit $H = \{(), (1,3)(2,4)\} \subseteq S_4$.

a. Montrer que H est un sous-groupe de S_4 qui n'est pas normal dans S_4.

b. Montrer que H est un sous-groupe normal de $V = \{(), (1,3)(2,4), (1,2)(3,4), (1,4)(2,3)\}$.

Exercice 6. Soit $H \leq K \leq G$. Montrer que si $H \triangleleft G$, alors $H \triangleleft K$.

Exercice 7. Soit G un groupe et H un sous-groupe de G tel que $[G : H] = 2$.

a. Montrer que $G = H \cup gH = H \cup Hg$ pour tout $g \in G \setminus H$.

b. En déduire que $gH = Hg$ pour tout $g \in G$.

c. Montrer que si a et b sont deux éléments de G tels que $a, b \notin H$, alors $ab \in H$.

Exercice 8. Soit $Q = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}$ muni de l'opération pour laquelle : 1 est l'élément neutre de Q ; $(-1)x = -x = x(-1)$ pour tout $x \in Q$; et $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Montrer que tout sous-groupe de Q est normal dans Q.

Exercice 9. Soit H un sous-groupe de G tel que $\varphi(H) = H$ pour tout isomorphisme $\varphi : G \to G$. Montrer que H est un sous-groupe normal de G.

(*Indice: étudier l'application* $\varphi_g(x) = gxg^{-1}$)

Exercice 10. Soit H un sous-groupe normal de G. Montrer que si H est monogène, alors tout sous-groupe de H est un sous-groupe normal de G.