Feuille d'exercices 9

Sous-groupes normaux

Exercice 1. Soit M et N deux sous-groupes normaux d'un groupe G. Montrer que :

a. $M \cap N \lhd G$.

b. $H \cap N \lhd H$, où H est un sous-groupe quelconque de G.

c. $MN = \{m\,n : m \in M, n \in N\} \lhd G$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et G un groupe fini tel que $(xy)^n = x^n y^n$ pour tous $x, y \in G$.

a. Montrer que $G_{(n)} = \{z \in G : z^n = e\}$ est un sous-groupe normal dans G.

b. Montrer que $G^{(n)} = \{x^n : x \in G\}$ est un sous-groupe normal dans G.

Exercice 3. Soit H un sous-groupe d'ordre n d'un groupe G. Montrer que si H est le seul sous-groupe de G d'ordre n, alors H est un sous-groupe normal de G.

Exercice 4. Soit $\mathcal{H}$ le sous-groupe de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ engendré par la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a. Montrer que $\mathcal{H}$ est un groupe monogène d'ordre 4 :

$$\mathcal{H} = \{I_2, J, J^2, J^3\}.$$

b. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que

$$A\mathcal{H} = \{A, AJ, -A, -AJ\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{H}A = \{A, JA, -A, -JA\}.$$

c. Soit $A \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A\mathcal{H} = \mathcal{H}A$ ssi $A = -A^t$.

Groupes quotients

Exercice 5. Soit G un groupe abélien et N un sous-groupe de G. Montrer que G/N est un groupe abélien.

Exercice 6. Soit N un sous-groupe normal dans G et X une partie de G telle que le groupe quotient G/N est engendré par $\{xN : x \in X\}$. Montrer que G est engendré par $X \cup N$.

Exercice 7. Le *centre* de G est l'ensemble

$$Z(G) = \{z \in G : zg = gz \text{ pour tout } g \in G\}.$$

a. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G.

b. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe normal dans G.

c. Montrer que si $G/Z(G)$ est monogène, alors G est abélien.

Groupes quotients et le Théorème de Lagrange

Exercice 8. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G. Si $[G : H] = m$, alors l'ordre de tout élément de G/H divise m.

Exercice 9. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G et $a \in G$. Montrer que l'ordre de aH dans G/H divise l'ordre de a dans G.

Exercice 10. Soit H un sous-groupe normal d'un groupe G et p un nombre premier. Si $[G : H] = p$, alors l'ordre de tout $a \notin H$ est un multiple de p.