Devoir 1

à remettre le *28 janvier 2015*

Exercice 1. *(Axiome du choix pour les ensembles finis)* Soit X un ensemble fini non vide et $\mathcal{P}^*(X)$ l'ensemble de parties non vides de X. Montrer, par récurrence sur la cardinalité de X, qu'il existe une application $f : \mathcal{P}^*(X) \to X$ telle que $f(Y) \in Y$ pour tout $Y \in \mathcal{P}^*(X)$.

Exercice 2. On définit deux opérations $\boxplus$ et $\boxtimes$ sur $\mathbb{Q}$:

$$a \boxplus b = a + b + 1$$
$$a \boxtimes b = ab + a + b$$

Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de $\boxplus$ et $\boxtimes$ est un corps. (Indiquer les éléments neutres pour les deux opérations ; pour tout $a \in \mathbb{Q}$ non nul, indiquer son inverse pour les deux opérations.)

Exercice 3. Soit $\mathbb{K}$ un corps fini à m éléments. Montrer que $x^{m-1} = 1$ pour tout $x \in \mathbb{K}^*$.

Exercice 4.

a. Soit A un anneau unitaire de cardinalité $|A| \leq 7$. Montrer que A est commutatif.

b. Montrer que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures 2×2 à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est un anneau unitaire non commutatif de cardinalité 8.

Exercice 5.

Définitions. *Soit A un anneau unitaire.*
— *Un élément a de A est* nilpotent *s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a^n = 0$.*
— *Un élément a de A est* unipotent *si $1 - a$ est nilpotent.*

Soit A un anneau unitaire non trivial.

a. Soit $a \in A$ nilpotent. Montrer que $a + 1$ et $a - 1$ sont inversibles.
(Indice: $1 - a^n = (1 - a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})$.))

b. Montrer que tout élément unipotent dans A est inversible.

c. Montrer que si A est commutatif et $a \in A$ est nilpotent, alors xa est nilpotent pour tout $x \in A$.

d. Montrer que si A est commutatif, alors la somme de deux éléments nilpotents dans A est nilpotent. *(Indice: formule du binôme.)*

e. Montrer que si A est commutatif, alors le produit de deux éléments unipotents est unipotent. *(Indice: développer $(1 - ab)^{n+m} = ((1 - a) + a(1 - b))^{n+m}$.)*