

Devoir 2

à remettre le 23 mars 2015

Exercice 1.

a. Montrer que l'anneau \mathbb{Z} admet la propriété suivante :

pour tout anneau unitaire A , il existe un et un seul morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \rightarrow A$.

b. Soit B un anneau unitaire qui admet la propriété suivante :

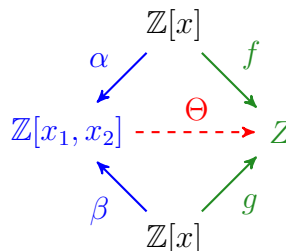
pour tout anneau unitaire A , il existe un et un seul morphisme d'anneaux $B \rightarrow A$.

Montrer que $B \cong \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ admet la propriété suivante :

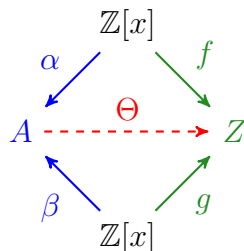
pour tout anneau commutatif Z et tous morphismes d'anneaux commutatifs $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ et $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux commutatifs $\mathbb{Z}[x_1, x_2] \xrightarrow{\Theta} Z$ qui rend commutatif le diagramme suivant



où α et β sont les morphismes d'anneaux définis par $\alpha(x) = x_1$ et $\beta(x) = x_2$.

b. Soit A un anneau commutatif et $\alpha : \mathbb{Z}[x] \rightarrow A$ et $\beta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow A$ deux morphismes d'anneaux qui admet la propriété suivante :

pour tout anneau commutatif Z et tous morphismes d'anneaux commutatifs $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ et $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux commutatifs $A \xrightarrow{\Theta} Z$ qui rend commutatif le diagramme suivant.



Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

Exercice 3. Soit $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique. On définit $\bar{\pi} : \mathbb{Z}[x] \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ par

$$\bar{\pi}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d) = \pi(a_0) + \pi(a_1)x + \pi(a_2)x^2 + \cdots + \pi(a_d)x^d.$$

- Montrer que $\bar{\pi}$ est un morphisme d'anneaux.
- Soit $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Montrer que si $p(x)$ est un polynôme unitaire et si $\bar{\pi}(p(x))$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$, alors $p(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.
- Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur \mathbb{Q} :

$$x^4 + 10x^3 + 7 \quad x^4 - 10x^2 + 1 \quad x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 3 \quad x^5 + 1.$$

Exercice 4.

Soit A un sous-anneau d'un anneau B .

On dit que deux éléments $b, c \in B$ sont algébriquement indépendants sur A si pour $a_{i,j} \in A$, la condition $\sum_{i,j} a_{i,j} b^i c^j = 0$ entraîne que $a_{i,j} = 0$ pour tous i, j .

Montrer que b et c sont algébriquement indépendants sur A ssi

- b est transcendant sur A , et
- c est transcendant sur $A[b]$.

Bonus!

(Pour ceux qui ne ont pas obtenu 15/15 sur ce problème de l'examen 1, cela contribuera des points à la note de l'examen 1)

Soit $\varphi : A \rightarrow B$ un morphisme d'anneaux et I un idéal de A .

- Expliquer pourquoi $\varphi(I)$ n'est pas forcément un idéal de B .
- Montrer que si φ est surjectif, alors $\varphi(I)$ est un idéal de B .
- Montrer que si φ est surjectif, alors

$$B/\varphi(I) \cong A/(\ker(\varphi) + I).$$