Devoir 2

à remettre le *23 mars 2015*

Exercice 1.

a. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ admet la propriété suivante :

pour tout anneau unitaire A, il existe un et un seul morphisme d'anneaux $\mathbb{Z} \to A$.

b. Soit B un anneau unitaire qui admet la propriété suivante :

pour tout anneau unitaire A, il existe un et un seul morphisme d'anneaux $B \to A$.

Montrer que $B \cong \mathbb{Z}$.

Exercice 2.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ admet la propriété suivante :

pour tout anneau commutatif Z *et tous morphismes d'anneaux* commutatifs $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ *et* $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, *il existe un et un seul morphisme d'anneaux* commutatifs $\mathbb{Z}[x_1, x_2] \xrightarrow{\Theta} Z$ *qui rend commutatif le diagramme suivant*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[x] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\mathbb{Z}[x_1, x_2] \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & Z \\
 & \mathbb{Z}[x] \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

où α et β sont les morphismes d'anneaux définis par $\alpha(x) = x_1$ et $\beta(x) = x_2$.

b. Soit A un anneau commutatif et $\alpha : \mathbb{Z}[x] \to A$ et $\beta : \mathbb{Z}[x] \to A$ deux morphismes d'anneaux qui admet la propriété suivante :

pour tout anneau commutatif Z *et tous morphismes d'anneaux* commutatifs $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ *et* $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, *il existe un et un seul morphisme d'anneaux* commutatifs $A \xrightarrow{\Theta} Z$ *qui rend commutatif le diagramme suivant.*

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}[x] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & Z \\
 & \mathbb{Z}[x] \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

Exercice 3. Soit $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique. On définit $\overline{\pi} : \mathbb{Z}[x] \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ par

$$\overline{\pi}(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_d x^d) = \pi(a_0) + \pi(a_1)x + \pi(a_2)x^2 + \cdots \pi(a_d)x^d.$$

a. Montrer que $\overline{\pi}$ est un morphisme d'anneaux.

b. Soit $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Montrer que si $p(x)$ est un polynôme unitaire et si $\overline{\pi}(p(x))$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$, alors $p(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

c. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$:

$$x^4 + 10x^3 + 7 \qquad x^4 - 10x^2 + 1 \qquad x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 3 \qquad x^5 + 1.$$

Exercice 4.
Soit A un sous-anneau d'un anneau B.

> *On dit que deux éléments $b, c \in B$ sont* algébriquement indépendants sur A *si pour $a_{i,j} \in A$, la condition $\sum_{i,j} a_{i,j} b^i c^j = 0$ entraîne que $a_{i,j} = 0$ pour tous i, j.*

Montrer que b et c sont algébriquement indépendants sur A ssi

(i) b est transcendant sur A, et

(ii) c est transcendant sur $A[b]$.

Bonus!
(Pour ceux qui ne ont pas obtenu 15/15 sur ce problème de l'examen 1, cela contribuera des points à la note de l'examen 1)

Soit $\varphi : A \to B$ un morphisme d'anneaux et I un idéal de A.

a. Expliquer pourquoi $\varphi(I)$ n'est pas forcément un idéal de B.

b. Montrer que si φ est surjectif, alors $\varphi(I)$ est un idéal de B.

c. Montrer que si φ est surjectif, alors

$$B/\varphi(I) \cong A/(\ker(\varphi) + I).$$