

## Devoir 2

à remettre le 23 mars 2015

### Exercice 1.

a. Montrer que l'anneau  $\mathbb{Z}$  admet la propriété suivante :

*pour tout anneau unitaire  $A$ , il existe un et un seul morphisme d'anneaux  $\mathbb{Z} \rightarrow A$ .*

b. Soit  $B$  un anneau unitaire qui admet la propriété suivante :

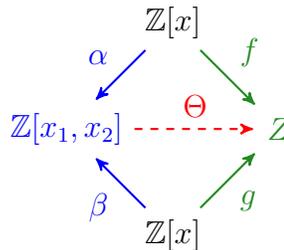
*pour tout anneau unitaire  $A$ , il existe un et un seul morphisme d'anneaux  $B \rightarrow A$ .*

Montrer que  $B \cong \mathbb{Z}$ .

### Exercice 2.

a. Montrer que  $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$  admet la propriété suivante :

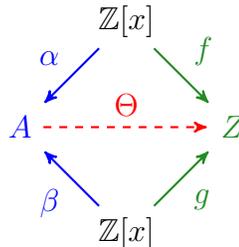
*pour tout anneau commutatif  $Z$  et tous morphismes d'anneaux commutatifs  $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$  et  $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$ , il existe un et un seul morphisme d'anneaux commutatifs  $\mathbb{Z}[x_1, x_2] \xrightarrow{\Theta} Z$  qui rend commutatif le diagramme suivant*



*où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les morphismes d'anneaux définis par  $\alpha(x) = x_1$  et  $\beta(x) = x_2$ .*

b. Soit  $A$  un anneau commutatif et  $\alpha : \mathbb{Z}[x] \rightarrow A$  et  $\beta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow A$  deux morphismes d'anneaux qui admet la propriété suivante :

*pour tout anneau commutatif  $Z$  et tous morphismes d'anneaux commutatifs  $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$  et  $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$ , il existe un et un seul morphisme d'anneaux commutatifs  $A \xrightarrow{\Theta} Z$  qui rend commutatif le diagramme suivant.*



Montrer que  $A \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2]$ .

**Exercice 3.** Soit  $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  la surjection canonique. On définit  $\bar{\pi} : \mathbb{Z}[x] \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$  par

$$\bar{\pi}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d) = \pi(a_0) + \pi(a_1)x + \pi(a_2)x^2 + \cdots + \pi(a_d)x^d.$$

- Montrer que  $\bar{\pi}$  est un morphisme d'anneaux.
- Soit  $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ . Montrer que si  $p(x)$  est un polynôme unitaire et si  $\bar{\pi}(p(x))$  est irréductible dans  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ , alors  $p(x)$  est irréductible dans  $\mathbb{Z}[x]$ .
- Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur  $\mathbb{Q}$  :

$$x^4 + 10x^3 + 7 \quad x^4 - 10x^2 + 1 \quad x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 3 \quad x^5 + 1.$$

**Exercice 4.**

Soit  $A$  un sous-anneau d'un anneau  $B$ .

*On dit que deux éléments  $b, c \in B$  sont algébriquement indépendants sur  $A$  si pour  $a_{i,j} \in A$ , la condition  $\sum_{i,j} a_{i,j} b^i c^j = 0$  entraîne que  $a_{i,j} = 0$  pour tous  $i, j$ .*

Montrer que  $b$  et  $c$  sont algébriquement indépendants sur  $A$  ssi

- $b$  est transcendant sur  $A$ , et
- $c$  est transcendant sur  $A[b]$ .

**Bonus!**

*(Pour ceux qui ne ont pas obtenu 15/15 sur ce problème de l'examen 1, cela contribuera des points à la note de l'examen 1)*

Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un morphisme d'anneaux et  $I$  un idéal de  $A$ .

- Expliquer pourquoi  $\varphi(I)$  n'est pas forcément un idéal de  $B$ .
- Montrer que si  $\varphi$  est surjectif, alors  $\varphi(I)$  est un idéal de  $B$ .
- Montrer que si  $\varphi$  est surjectif, alors

$$B/\varphi(I) \cong A/(\ker(\varphi) + I).$$