Problème 1 de l'examen final

Problème 1.

Soit K un corps commutatif et $\varphi : \mathbb{Z} \to K$ l'unique morphisme d'anneaux de $\mathbb{Z}$ dans K. On note par $\chi(K)$ l'entier $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\ker(\varphi) = n\mathbb{Z}.$$

a. Expliquer pourquoi il existe un et un seul morphisme d'anneaux φ de $\mathbb{Z}$ dans K, et pourquoi le noyau de φ est de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

b. Montrer que si $\chi(K) > 0$, alors $\chi(K)$ est un nombre premier et K contient un sous-corps K' isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, où $p = \chi(K)$.

c. Montrer que si $\chi(K) = 0$, alors K contient un sous-corps K' isomorphe à $\mathbb{Q}$.

d. Soit K' le sous-corps de K défini dans les parties précédentes. Montrer que si L est un sous-corps de K, alors $K' \subseteq L$. *(Autrement dit, montrer que K' est le plus petit sous-corps de K.)*