Problème 1 de l'examen intra 2

Problème 1.

Soit A un anneau ***intègre****. Un élément u de A est dit* **spécial** *s'il vérifie les conditions suivantes :*

(1) u est non nul ;

(2) u n'est pas inversible dans A ; et

(3) pour tout $a \in A$, soit u divise a ou il existe $z \in A$ inversible tel que u divise $a - z$.

a. Montrer que n est un élément spécial de l'anneau $\mathbb{Z}$ ssi $n \in \{2, -2, 3, -3\}$.

b. Montrer que tout élément spécial est irréductible.

> ***Bonus.*** *Ceci est vrai même si A* n'est pas intègre. *La définition d'élément irréductible est valable pour tout anneau commutatif A : un élément non nul $u \in A$ est* irréductible *si u n'est pas inversible et si pour toute factorisation $p = xy$ avec $x, y \in A$ on a que x est inversible ou y est inversible.* ***Fournir une démonstration qui n'utilise pas l'hypothèse que A soit intègre (ou fournir un contre-exemple à cette déclaration).***

c. Montrer qu'un élément irréductible n'est pas forcément un élément spécial.

d. Montrer que si A est un anneau euclidien **qui possède (au moins) un élément qui est à la fois non nul et non inversible**, alors A possède au moins un élément spécial.