Feuille d'exercices 1

Exercice 1. Soit $C(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $C(\mathbb{R})$ muni de l'addition et du produit « poncturellement » est un anneau :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(f \times g)(x) = f(x)g(x)$$

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire et soit $A[X]$ l'ensemble des polynômes en la variable X à coefficients dans A. Montrer que $A[X]$ muni de l'addition et du produit habituels des polynômes forme un anneau.

Exercice 3. Soit A un anneau unitaire et soit $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$ l'ensemble des matrices de format $n\times n$ à coefficients dans A. Montrer que $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$ muni de l'addition et du produit habituels des matrices forme un anneau.

Exercice 4. On définit deux opérations $\boxplus$ et $\boxtimes$ sur $\mathbb{Z}$:

$$a \boxplus b = a + b - 1$$
$$a \boxtimes b = ab - (a+b) + 2$$

Montrer que $\mathbb{Z}$ muni de $\boxplus$ et $\boxtimes$ est un anneau unitaire qui ne possède pas des diviseurs de zéro.

Exercice 5. Soit A un anneau tel que $(A, +)$ est un groupe monogène. Montrer que A est commutatif.

Exercice 6. Soit A un anneau unitaire commutatif. Montrer que si a est un diviseur de zéro dans A, alors a n'est pas inversible.

Exercice 7. Soit A un anneau unitaire tel que tout élément $a \in A$ est idempotent.

a. Montrer que A est commutatif et $a + a = 0$.

b. Montrer que tout élément $a \neq 1$ est un diviseur de zéro.

c. Montrer que 1 est le seul élément inversible dans A.

Exercice 8. *(Cet exercice vise à répondre à la question : pourquoi exigeons-nous la commutativité de l'addition dans la définition d'un anneau ?)*

Montrer que l'axiome de commutativité de l'addition dans la définition d'un anneau *unitaire* découle à partir des autres axiomes : dans la définition d'un anneau *unitaire*, remplacer l'axiome

« $(A, +)$ est un groupe abélien »

par ce qui suit :

« $(A, +)$ est un groupe » (pas nécessairement abélien).

Montrer pour tous $a, b \in A$ on a que $a + b = b + a$.