Feuille d'exercices 10

Éléments irréductibles, premiers, associés

Exercice 1. Soit $\mathbb{C}[x, y, z, w]$ un anneau des polynômes à 4 indéterminées, $I = \langle xw - yz \rangle$ (l'idéal engendré par $xw - yz$) et

$$A = \mathbb{C}[x, y, z, w]/I = \mathbb{C}[x, y, z, w]/\left\langle xw - yz \right\rangle.$$

a. Montrer que les éléments

$$\overline{x} = x + I \qquad \overline{y} = y + I \qquad \overline{z} = z + I \qquad \overline{w} = w + I$$

sont irréductibles dans A.

b. Montrer que les éléments $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$, $\overline{w}$ ne sont pas associés les uns des autres.

c. Montrer que $\overline{xw}$ admet deux factorisations en produit des éléments irréductibles.

d. Montrer que $A / \langle \overline{x} \rangle \cong \mathbb{C}[x, y, z, w]/ \langle x, yz \rangle$.

e. En déduire que $A/ \langle \overline{x} \rangle$ n'est pas intégre, et que $\overline{x}$ n'est pas un élément premier.

Anneaux euclidiens et principaux

Exercice 2. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/I$ est fini pour tout idéal non nul I de $\mathbb{Z}[i]$.
(Indice: Rappeler que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.)

Exercice 3. Soit A un anneau euclidien de valuation $\varphi : A^* \to \mathbb{N}$ tel que les seuls éléments inversibles de A sont 1 et -1. Si a est un élément de valuation minimal parmi les éléments non inversibles de A^*, alors $A/ \langle a \rangle$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit A un anneau intègre et $\psi : A^* \to \mathbb{N}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $\psi(a) > 0$ pour tout $a \in A^*$;

(2) pour tous $a, b \in A^*$, si $\psi(a) \geq \psi(b)$, alors soit b divise a soit il existe $s, t \in A$ tels que

$$\psi(sa - tb) < \psi(b).$$

Montrer que A est un anneau principal.

Non existence d'un pgcd

Exercice 5. Soit $\alpha = \sqrt{-5}$.

a. Montrer que $1 + \alpha$ divise $3 + 3\alpha$ et $3 - 3\alpha$ dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.

b. Montrer que $1 - \alpha$ divise $3 + 3\alpha$ et $3 - 3\alpha$ dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.

c. En déduire que $3 + 3\alpha$ et $3 - 3\alpha$ ne possèdent pas un pgcd dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.

d. Conclure que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas un anneau euclidien et qu'il n'est pas un anneau principal.