Feuille d'exercices 2

Sur les anneaux

Exercice 1. Soit A un anneau unitaire non trivial. Montrer que l'ensemble d'éléments inversibles dans A, muni de la multiplication de A, est un groupe.

Exercice 2. Si A est un anneau unitaire commutatif non trivial et ab est inversible dans A, alors a et b sont inversible dans A.

Exercice 3. Soit $a \in A$. Montrer que si a possède un inverse à gauche y et un inverse à droite x, alors a est inversible et $a^{-1} = x = y$.

Exercice 4. Soit A un anneau unitaire non trivial. Si $a \in A$ tel que $a^2 = 0$, montrer que $a + 1$ et $a - 1$ sont inversible dans A.

Exercice 5. Soit $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

Par exemple, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $f(x) = \frac{sin(x)}{e^{|x|}}$ appartiennent à $C_0(\mathbb{R})$.

Montrer que $C_0(\mathbb{R})$ muni de l'addition et du produit suivants

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

vérifie la définition d'un *anneau qui ne possède pas un élément neutre* pour la multiplication.

Produit direct d'anneaux

Exercice 6. Soit A et B deux anneaux. On munit le produit cartésien $A \times B$ de deux opérations :

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$
$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 \cdot a_2, b_1 \cdot b_2)$$

pour tous $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$.

a. Montrer que $A \times B$ muni de ces deux opérations est un anneau.

b. Montrer que si A et B sont commutatifs, alors $A \times B$ est commutatif.

c. Montrer que si A et B sont unitaires, alors $A \times B$ est unitaire.

d. Décrire les diviseurs de zéro dans $A \times B$.

e. Est-il possible que $A \times B$ ne possède pas de diviseurs de zéro ?

f. Décrire les éléments inversible dans $A \times B$.

g. Est-il possible que $A \times B$ est un corps ?

Corps finis

Exercice 7. Soit $\mathbb{K}$ un corps à 4 éléments $\{0, 1, \alpha, \beta\}$. (En particulier, $0, 1, \alpha, \beta$ sont distincts.)

a. Montrer que $\alpha^2 = \beta$.

b. Montrer que $1 + \alpha = \alpha^2$.

c. Dresser la table de multiplication et la table d'addition de $\mathbb{K}$.

d. Montrer que $(\mathbb{K}, +)$ est isomorphe au groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

e. Montrer que $\mathbb{K}$ n'est pas isomorphe à l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 8. Soit A un anneau unitaire. On dit que A est un *anneau intègre* s'il est commutatif et s'il satisfait la propriété suivante :

$$ab = 0 \text{ entraîne } a = 0 \text{ ou } b = 0.$$

Montrer que tout anneau intègre fini est un corps (commutatif).

Sous-anneaux

Exercice 9. Soit p un nombre premier et

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{q \in \mathbb{Q} : \text{le dénominateur de } q \text{ n'est pas divisible par } p\}.$$

a. Montrer que $\mathbb{Z}_{(p)}$ forme un sous-anneau de $\mathbb{Q}$.

b. Trouver les éléments inversibles et les éléments non inversibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$.

c. Montrer que l'ensemble des éléments *non* inversibles de $\mathbb{Z}_{(p)}$ forme un sous-groupe de $(\mathbb{Z}_{(p)}, +)$.