Feuille d'exercices 3 : Idéaux

Exercice 1. Soit A un anneau et I un sous-ensemble de A. Montrer que

a. I est un idéal à gauche de A ssi I est un sous-groupe de $(A, +)$ tel que $AI \subseteq I$.

b. I est un idéal à droite de A ssi I est un sous-groupe de $(A, +)$ tel que $IA \subseteq I$.

c. I est un idéal de A ssi I est un sous-groupe de $(A, +)$ tel que $IA \subseteq I$ et $AI \subseteq I$.

Exercice 2. Soit A l'anneau des matrices de format 2×2 dont les entrées sont des nombres réels. Montrer que le sous-ensemble suivant de A est un idéal à droite de A :

$$I = \left\{ \begin{pmatrix} a - 2b & b \\ 2a - 4b & 2b \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Est-il premier ? maximal ?

Exercice 3. Soit

$$A = \mathbb{Z}\left(\sqrt{-5}\right) = \left\{ a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

a. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

b. Soit I l'idéal de A engendré par 2 et $1 + \sqrt{-5}$. Montrer que I n'est pas principal.

c. Montrer que I^2 est l'idéal principal de A engendré par 2.

Exercice 4. Soit I et J deux idéaux bilatères d'un anneau A.

a. Montrer que $IJ \subseteq I \cap J$.

b. Montrer que IJ est un idéal bilatère de A.

Exercice 5. Soit A un anneau unitaire.

a. Soit $a \in A$. On définit

$$\rho(a) = \{x \in A : ax = 0\}.$$

Montrer que $\rho(a)$ est un idéal à droite de A.

b. Soit I un idéal à gauche de A. On définit

$$\lambda(I) = \{a \in A : ax = 0 \text{ pour tout } x \in I\}.$$

Montrer que I est un idéal bilatère de A.

Exercice 6. Soit A un anneau unitaire commutatif qui ne possède pas d'idéaux autre que $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps.

Exercice 7. Soit $f : A \to B$ un morphisme d'anneaux commutatifs.

a. Montrer que si P est un idéal premier de B, alors $f^{-1}(P)$ est un idéal premier de A.

b. Déterminer si l'énoncé suivant est vrai : si P est un idéal maximal de B, alors $f^{-1}(P)$ est un idéal maximal de A.

Exercice 8. Soit A un anneau commutatif. On note $\operatorname{Spec}(A)$ l'ensemble d'idéaux premiers de A. Pour toute partie S de A, on définit

$$V(S) = \{P \in \operatorname{Spec}(A) : S \subseteq P\}.$$

a. $V(\{1\}) = \emptyset$.

b. $V(\{0\}) = \operatorname{Spec}(A)$.

c. Si I et J sont idéaux de A, alors $V(I \cap J) = V(I) \cup V(J)$.

d. Si I est le plus petit idéal de A contenant S, alors $V(S) = V(I)$.

e. Si $(E_i)_i$ est une famille de parties de A, alors

$$V\left(\bigcup_i E_i\right) = \bigcap_i V(E_i).$$

(Cet exercice montre que les ensembles $V(S)$, $S \subseteq A$, sont les fermés d'une topologie sur $\operatorname{Spec}(A)$ *appelée la* topologie de Zariski sur le spectre premier de l'anneau commutatif A.*)*

Exercice 9. *(La notion d'idéal premier dans un anneau non commutatif.)*

Soit A un anneau (pas nécessairement commutatif). On dit qu'un idéal propre P de A est :

— *premier* si $ab \in P$ entraîne $a \in P$ ou $b \in P$ pour tous éléments $a, b \in P$;

— *primordial* si $IJ \subseteq P$ entraîne $I \subseteq P$ ou $J \subseteq P$ pour tous idéaux I et J de A.

a. Montrer que si P est premier, alors P est primordial.

b. Montrer que si A est commutatif, alors P est primordial ssi P est premier.

c. Montrer que l'idéal nul de l'anneau $\operatorname{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$ est primordial, mais pas premier.

d. Montrer qu'un idéal maximal est primordial.