Feuille d'exercices 4

Morphismes d'anneaux

Exercice 1. *(Morphismes et sous-anneaux)* Soit A, B deux anneaux non nuls (unitaires).

On dit qu'une application $\psi : A \to B$ est un *psuedo-morphisme d'anneaux* si
(M1) $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$ pour tout $x, y \in A$; et
(M2) $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$ pour tout $, y \in A$.
Donc, $\varphi : A \to B$ est un *morphisme d'anneaux* s'il est un psuedo-morphisme qui vérifie
(M3) $\varphi(1_A) = 1_B$.

Soit $\psi : A \to B$ un psuedo-morphisme d'anneaux.

a. Montrer que l'image d'un *psuedo-morphisme* $\psi : A \to B$ est un anneau.

b. Montrer que l'image d'un *morphisme* $\varphi : A \to B$ est un sous-anneau de B.

c. Montrer que le morphisme nul $\zeta : A \to B$, défini par $\zeta(a) = 0$ pour tout $a \in A$, est un psuedo-morphisme. Est-il un morphisme ? En déduire que l'image d'un *psuedo-morphisme* n'est pas forcément un sous-anneaux de B.

d. Soit S une partie de A. Montrer que S est un sous-anneau de A ssi l'inclusion incl : $S \to A$ est un morphisme d'anneaux. *(L'inclusion est l'application définie par* $\mathrm{incl}(s) = s$.*)*

e. Montrer que si $1_B \in \psi(A)$, alors ψ est un morphisme.

f. Montrer que si ψ est surjectif, alors ψ est un morphisme.

g. Montrer que si ψ est non nul et B ne possède pas des diviseurs de zéro, alors ψ est un morphisme.

Exercice 2. *(Adjonction d'une unité)* Soit A un « *anneau sans unité* ». On munit le produit direct $A_1 = A \times \mathbb{Z}$ des groupes abéliens A et $\mathbb{Z}$ de la multiplication

$$(a_1, n_1) \cdot (a_2, n_2) = (a_1 a_2 + n_1 a_2 + n_2 a_1, n_1 n_2)\,.$$

a. Montrer que A_1 est un anneau unitaire.

b. Montrer que $A_0 = \{(a, 0) : a \in A\}$ est un idéal de l'anneau A_1.

c. Montrer que l'application $\psi : A \to A_0$ définie par $\psi(a) = (a, 0)$ est une bijection qui préserve l'addition et la multiplication. (Autrement dit, A est « isomorphme » à A_0.)

Exercice 3. Soit A un anneau et

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : A & \longrightarrow & \mathrm{End}_{Ab}(A) \\ a & \longmapsto & \lambda_a \end{array}$$

où $\lambda_a : A \to A$ est la fonction définie par $\lambda_a(x) = ax$ pour tout $x \in A$.

a. Montrer que λ_a est un morphisme de groupes abéliens. Est-il un morphisme d'anneaux ?

b. Montrer que Λ est une injection.

c. Montrer que Λ est un morphisme d'anneaux.

Anneaux quotients

Exercice 4. Soit A un anneau et I un idéal bilatère de A. Montrer que tout élément $x+I$ de l'anneau quotient A/I admet une racine carrée (c'est-à-dire, un élément $y+I$ tel que $(y+I)^2 = x+I$) ssi pour tout $x \in A$ il existe $y \in A$ tel que $x - y^2 \in I$.

Exercice 5. Soit A un anneau et I un idéal bilatère de A. Montrer que tout élément de A/I est nilpotent ssi I vérifie la propriété suivante : pour tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$.

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif.

a. Montrer que l'ensemble N d'éléments de A qui sont nilpotents est un idéal de A.

b. Montrer que A/N ne possède pas des éléments nilpotents (autre que 0).

Théorèmes d'isomorphisme

Exercice 7. Soit n un entier positif. Montrer que $\mathrm{End}_{Ab}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux.

Exercice 8.

> *Soit* $\mathrm{Fon}(\mathbb{R})$ *l'anneau de fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et de la multiplication :* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *et* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.

Soit I l'ensemble de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe passe par les points $(0,0)$ et $(1,0)$.

a. Montrer que I est un idéal de $\mathrm{Fon}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathrm{Fon}(\mathbb{R})/I \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit A un anneau commutatif et $a \in A$ un élément idempotent.

a. Montrer que l'application $\pi_a(x) = ax$ est un morphisme d'anneaux de A dans A.

b. Montrer que le noyau de π_a est $I_a = \{x \in A : ax = 0\}$.

c. Montrer que l'image de π_a est $aA = \{ax : x \in A\}$.

d. En déduire que $A/I_a \cong Aa$.