

Feuille d'exercices 6

Polynômes irréductibles

Exercice 1.

- Trouver un nombre premier p pour lequel $x^2 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
- Trouver un nombre premier p pour lequel $x^2 - 2$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 2.

- Montrer que $x^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
- Factoriser $x^4 - 4$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.
- Déterminer si $x^3 + x^2 + x + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. S'il n'est pas irréductible, factoriser le polynôme en facteurs irréductibles.

Théorème de factorisation unique pour l'anneau de polynômes sur un corps

Exercice 3. Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}$. Si $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$ sont tels que

$$f(x), g(x), h(x) \text{ sont non nuls ; } f(x)g(x) = h(x)^n ; \quad f(x) \text{ et } g(x) \text{ sont copremiers ;}$$

montrer qu'il existe $u, v \in K$ inversibles et $\tilde{f}(x), \tilde{g}(x) \in K[x]$ tels que

$$f(x) = u\tilde{f}(x)^n \quad \text{et} \quad g(x) = v\tilde{g}(x)^n.$$

Polynômes irréductibles sur \mathbb{Q}

Exercice 4. Trouver les racines rationnelles des polynômes suivants.

$$a(x) = 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 15x - 14$$

$$b(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$$

$$c(x) = 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$$

Exercice 5. Trouver toutes les valeurs de m pour lesquelles le polynôme $3x^2 + mx - 5 \in \mathbb{Q}[x]$ n'est pas irréductible.

Exercice 6. Montrer que tout polynôme de la forme $x^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ où $b^2 - 4c$ n'est pas un carré parfait est irréductible sur \mathbb{Q} .