Feuille d'exercices 7

Polynômes irréductibles

Exercice 1.

a. Déterminer si le polynôme $p(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2$ possède des racines rationnelles.

b. Existe-il une factorisation non triviale de $p(x)$?

Exercice 2. Soit $p(x)$ et $q(x)$ des polynômes dans $K[x]$, où K est un corps commutatif. Vrai ou faux : Si $p(x)$ et $q(x)$ ont les mêmes racines dans K, alors $p(x)$ est un multiple scalaire de $q(x)$.

Exercice 3. Soit $p(x)$ et $q(x)$ des polynômes dans $K[x]$ du même degré d, où K est un corps commutatif. Montrer que si $p(a) = q(a)$ pour d valeurs distinctes de $a \in K$, alors $p(x) = q(x)$.

Exercice 4. Soit K un corps commutatif et $p(x) \in K[x]$. Montrer que $p(x)$ est irréductible sur K ssi $p(x+k)$ est irréductible sur K pour tout $k \in K$.

Critère d'Eisenstein

Exercice 5. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

a. $\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 1$

Exercice 6.

a. Montrer que $x^4 + 4x + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(Indice: Considérer le polynôme $(x+1)^4 + 4(x+1) + 1$.)

b. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$:

(i) $x^4 + 2x^2 - 1$ (ii) $x^3 - 3x^2 + 1$ (iii) $x^4 + 1$

(Indice: Faire une substitution.)

Exercice 7. Soit $n \geq 1$ un entier. On définit

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1.$$

a. Montrer que si k et l sont copremiers, alors le pgcd de $x^k - 1$ et $x^l - 1$ est $x - 1$.

b. Montrer que si k et l sont copremiers, alors $(x^k - 1)(x^l - 1)$ divise $(x-1)(x^{kl} - 1)$.

c. Montrer que si n n'est pas premier, alors Φ_n n'est pas irréductible.

d. Montrer que si n est premier Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(Indice: faire la substitution $x = y + 1$.)