Feuille d'exercices 8

Morphismes d'anneaux

Exercice 1.

Soit l'inclusion $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$ (ce qui est un morphisme d'anneaux) et $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Q} \to A$ deux morphismes d'anneaux unitaires.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r, "i"] & \mathbb{Q} \arrow[r, shift left, "\varphi_1"] \arrow[r, shift right, "\varphi_2"'] & A \end{tikzcd}$$

Montrer que si $\varphi_1 \circ i = \varphi_2 \circ i$, alors $\varphi_1 = \varphi_2$.

Propriétés universelles

Exercice 2. Soit A et B deux anneaux. Soit $A \times B$ le produit cartésien de A et B (défini à la feuille d'exercices 2) et $\pi_A : A \times B \to A$ et $\pi_B : A \times B \to B$ les morphismes suivants :

$$\pi_A(a,b) = a \qquad \pi_B(a,b) = b \qquad \big(\text{pour tout } (a,b) \in A \times B\big).$$

a. Montrer que $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ admet la propriété suivante :

> *pour tout anneau Z et tous morphismes d'anneaux $Z \xrightarrow{f_A} A$ et $Z \xrightarrow{f_B} B$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux $Z \xrightarrow{\Theta} A \times B$ qui rend commutatif le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} & A & \\ A \times B \arrow[ur, "\pi_A"] \arrow[dr, "\pi_B"'] & & Z \arrow[ul, "f_A"'] \arrow[dl, "f_B"] \arrow[ll, dashed, "\Theta"'] \\ & B & \end{tikzcd}$$

b. Montrer que si P est un anneau et $\rho_A : P \to A$ et $\rho_B : P \to B$ sont des morphismes d'anneaux tels que (P, ρ_A, ρ_B) admet la propriété ci-dessus, alors $P \cong A \times B$.

L'anneau des entiers de Gauss

Exercice 3. *L'anneau des entiers de Gauss* est

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[i]^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ z &\longmapsto |z|^2 \end{aligned}$$

où $\mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$ et $w \in \mathbb{Z}[i]$.

a. Montrer que $\varphi(z_1) \leq \varphi(z_1 z_2)$.

b. Montrer que il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que

$$z_1 = qz_2 + r \qquad \text{avec } r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(z_2).$$

c. Montrer que $\varphi(z_1) \geq 1$.

d. Montrer que $\varphi(z_1) = 1$ ssi z_1 est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$.

e. Montrer que si z_1 et z_2 sont *associés*[1], alors $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$.

f. Montrer que si z_1 divise z_2 et $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, alors z_1 et z_2 sont associés.

g. Montrer que $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1)\varphi(z_2)$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$ non nuls.

h. Montrer que si $\varphi(z)$ est un premier dans $\mathbb{N}$, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

Corp des fractions d'un anneau intègre

Exercice 4. Montrer que le corps des fractions de $\mathbb{Z}[i]$ est $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 5. Calculer le corps des fractions de chacun des anneaux suivants.

a. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *b.* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *c.* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *d.* $\mathbb{Z}[x]$

Exercice 6. Montrer que si A et B sont des anneaux intègres isomorphes, alors leurs corps des fractions sont isomorphes.

Exercice 7. Soit P un idéal premier d'un anneau intègre A. Montrer que

$$B = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A, b \notin P \right\}$$

est un sous-anneau du corps des fractions de A.

1. z_1 et z_2 sont *associés* s'il existe un élément inversible $u \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z_1 = uz_2$.