

## Feuille d'exercices 8

## Morphismes d'anneaux

## Exercice 1.

Soit l'inclusion  $\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q}$  (ce qui est un morphisme d'anneaux) et  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{Q} \rightarrow A$  deux morphismes d'anneaux unitaires.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{i} \mathbb{Q} \begin{array}{c} \xrightarrow{\varphi_1} \\ \xrightarrow{\varphi_2} \end{array} A$$

Montrer que si  $\varphi_1 \circ i = \varphi_2 \circ i$ , alors  $\varphi_1 = \varphi_2$ .

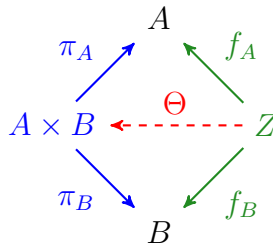
## Propriétés universelles

**Exercice 2.** Soit  $A$  et  $B$  deux anneaux. Soit  $A \times B$  le produit cartésien de  $A$  et  $B$  (défini à la feuille d'exercices 2) et  $\pi_A : A \times B \rightarrow A$  et  $\pi_B : A \times B \rightarrow B$  les morphismes suivants :

$$\pi_A(a, b) = a \quad \pi_B(a, b) = b \quad (\text{pour tout } (a, b) \in A \times B).$$

a. Montrer que  $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$  admet la propriété suivante :

*pour tout anneau  $Z$  et tous morphismes d'anneaux  $Z \xrightarrow{f_A} A$  et  $Z \xrightarrow{f_B} B$ , il existe un et un seul morphisme d'anneaux  $Z \xrightarrow{\Theta} A \times B$  qui rend commutatif le diagramme suivant :*



b. Montrer que si  $P$  est un anneau et  $\rho_A : P \rightarrow A$  et  $\rho_B : P \rightarrow B$  sont des morphismes d'anneaux tels que  $(P, \rho_A, \rho_B)$  admet la propriété ci-dessus, alors  $P \cong A \times B$ .

### L'anneau des entiers de Gauss

**Exercice 3.** L'anneau des entiers de Gauss est

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[i]^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ z &\longmapsto |z|^2 \end{aligned}$$

où  $\mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$ . Soit  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$  et  $w \in \mathbb{Z}[i]$ .

a. Montrer que  $\varphi(z_1) \leq \varphi(z_1 z_2)$ .

b. Montrer que il existe  $q, r \in \mathbb{Z}[i]$  tels que

$$z_1 = qz_2 + r \quad \text{avec } r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(z_2).$$

c. Montrer que  $\varphi(z_1) \geq 1$ .

d. Montrer que  $\varphi(z_1) = 1$  ssi  $z_1$  est inversible dans  $\mathbb{Z}[i]$ .

e. Montrer que si  $z_1$  et  $z_2$  sont *associés*<sup>1</sup>, alors  $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ .

f. Montrer que si  $z_1$  divise  $z_2$  et  $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$ , alors  $z_1$  et  $z_2$  sont associés.

g. Montrer que  $\varphi(z_1 z_2) = \varphi(z_1) \varphi(z_2)$  pour tous  $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]$  non nuls.

h. Montrer que si  $\varphi(z)$  est un premier dans  $\mathbb{N}$ , alors  $z$  est irréductible dans  $\mathbb{Z}[i]$ .

### Corps des fractions d'un anneau intègre

**Exercice 4.** Montrer que le corps des fractions de  $\mathbb{Z}[i]$  est  $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$ .

**Exercice 5.** Calculer le corps des fractions de chacun des anneaux suivants.

a.  $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$

b.  $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$

c.  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$

d.  $\mathbb{Z}[x]$

**Exercice 6.** Montrer que si  $A$  et  $B$  sont des anneaux intègres isomorphes, alors leurs corps des fractions sont isomorphes.

**Exercice 7.** Soit  $P$  un idéal premier d'un anneau intègre  $A$ . Montrer que

$$B = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A, b \notin P \right\}$$

est un sous-anneau du corps des fractions de  $A$ .

---

1.  $z_1$  et  $z_2$  sont *associés* s'il existe un élément inversible  $u \in \mathbb{Z}[i]$  tel que  $z_1 = uz_2$ .