Feuille d'exercices 9

Gr : catégorie de groupes et morphismes de groupes.

Ab : catégorie de groupes abéliens et morphismes de groupes.

Ann$_1$ **:** catégorie d'anneaux unitaires et morphismes d'anneaux unitaires.

Ev$_{\mathbb{R}}$ **:** catégorie d'espaces vectoriel sur $\mathbb{R}$ et transformations linéaires.

Ens : catégorie d'ensemble dont les morphismes sont les fonctions.

Objets initials et finals dans une catégorie

Exercice 1. Soit $\mathcal{C}$ un catégorie.

— Un objet F de $\mathcal{C}$ est un *objet final* (ou *objet terminal*) si, pour tout objet $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, il existe un unique morphisme $X \to F$.

— Un objet I de $\mathcal{C}$ est un *objet initial* si, pour tout $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$, il existe un unique morphisme $I \to X$.

— Un objet N de $\mathcal{C}$ est un *objet nul* si N est à la fois initial et final.

a. Montrer qu'un objet initial est unique à isomorphisme près.

b. Montrer qu'un objet final est unique à isomorphisme près.

c. Si $\mathcal{C}$ possède un objet nul, montrer que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \neq \emptyset$ pour tous $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

d. Montrer que **Gr** et **Ev**$_{\mathbb{R}}$ contiennent des objets nuls.

e. Montrer que **Ens** a un objet initial et un objet final, mais pas d'objet nul.

f. Montrer que l'anneau $\mathbb{Z}$ est un objet initial dans la catégorie $\mathbf{Ann_1}$ et que l'anneau nul (l'anneau à un seul élément) est l'objet final.

Morphismes dans une catégorie

Exercice 2. Soient $X \xrightarrow{g} Y$ et $Y \xrightarrow{f} Z$ deux morphisme d'une catégorie $\mathcal{C}$.

a. Si $f \circ g$ est un monomorphisme, alors g est un monomorphisme.

b. Si f et g sont des monomorphismes, alors $f \circ g$ est un monomorphisme.

c. Si $f \circ g$ est un épimorphisme, alors f est un épimorphisme.

d. Si f et g sont des épimorphisme, alors $f \circ g$ est un épimorphisme.

e. Si f est un isomorphisme, alors f est un monomorphisme et un épimorphisme.

Exercice 3. Montrer que dans la catégorie **Ab**, les épimorphismes sont les morphismes surjectifs et les monomorphismes sont les morphismes injectifs. En déduire qu'un isomorphisme dans la catégorie **Ab** est un isomorphisme de groupes, et vice versa.

Exercice 4. Soit **Mon** la catégorie de monoïdes. Montrer que l'inclusion $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{Z}$ est un monomorphisme et un épimorphisme, mais pas un isomorphisme.

Exercice 5. Soit $\mathbf{Ann_1}$ la catégorie d'anneaux. Montrer que l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ est un monomorphisme et un épimorphisme, mais pas un isomorphisme.

« Éléments » dans une catégorie

Exercice 6. Soit F un objet final dans la catégorie **Ens**.

a. Montrer qu'il y a une bijection entre les éléments d'un ensemble A et les morphismes de **Ens** de la forme $F \to A$.

b. Si $A \xrightarrow{f} B$ est un morphisme de **Ens**, montrer qu'il y a une bijection entre les éléments de $\mathrm{im}(f)$ et les morphismes de la forme $F \to A \xrightarrow{f} B$.

Foncteurs

Exercice 7. Soit $\mathcal{B}$ la catégorie dont les objets sont les ensembles finis, les morphismes sonts les bijections, et la composition de morphismes est la composition d'applications.

a. Montrer que l'application **Perm** qui associe à tout ensemble fini X, l'ensemble de permutations de X, et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$, l'application

$$\sigma \quad \longmapsto \quad f \circ \sigma \circ f^{-1}$$

est un foncteur $\mathbf{Perm} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

b. Montrer que l'application **Liste** qui associe à tout ensemble fini X, l'ensemble de listes ordonnées[1] d'éléments de X, et à toute bijection $X \xrightarrow{f} Y$, l'application

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n :] \quad \longmapsto \quad [f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)]$$

est un foncteur $\mathbf{Liste} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbf{Ens}$.

c. Montrer que $\mathbf{Perm}(X) \cong \mathbf{Liste}(X)$, pour chaque $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{B})$.

d. Montrer qu'il n'existe pas de transformation naturelle entre **Perm** et **Liste**.

1. Par exemple, $\mathbf{Liste}(\{a, b, c\}) = \{[a, b, c], [a, c, b], [b, a, c], [b, c, a], [c, a, b], [c, b, a]\}$.