Devoir 1

à remettre le *29 janvier 2016*

Exercice 1. On définit deux opérations $\boxplus$ et $\boxtimes$ sur $\mathbb{Q}$:

$$a \boxplus b = a + b + 1$$
$$a \boxtimes b = ab + a + b$$

Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de $\boxplus$ et $\boxtimes$ est un corps commutatif. (Identifier les éléments neutres pour les deux opérations ; pour tout $a \in \mathbb{Q}$ non nul, indiquer son inverse pour les deux opérations.)

Exercice 2. Soit

$$A = \mathbb{Z}\left(\sqrt{-5}\right) = \left\{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\right\}.$$

a. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

b. Montrer que A n'est pas un corps (donner un élément non nul qui n'est pas inversible).

c. Soit I l'idéal de A engendré par 2 et $1 + \sqrt{-5}$. Montrer que I n'est pas principal.

d. Montrer que I^2 est l'idéal principal de A engendré par 2.

Exercice 3. Soit A l'ensemble de matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b \in \mathbb{R}$.

a. Montrer que A est un sous-anneaux de l'anneau $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que A est isomorphe à $\mathbb{C}$.

c. Montrer que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

est contenu dans un sous-anneau de $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ qui est isomorphe à A.

(Indice: Si S est un sous-anneau d'un anneau R et x est un élément inversible de R, alors xSx^{-1} est également un sous-anneau de R.)

d. Montrer qu'il existe une matrice $X \in \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ telle que

$$X^4 + 13X = M.$$