

Devoir 2

à remettre le 23 mars 2016

Exercice 1. Soit B un anneau unitaire qui admet la propriété suivante :

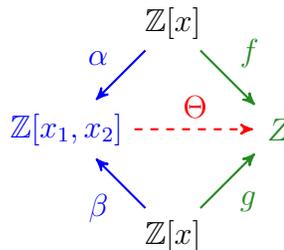
pour tout anneau unitaire A , il existe un et un seul morphisme d'anneaux $B \rightarrow A$.

Montrer que $B \cong \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ l'anneau de polynômes en deux indéterminées x_1 et x_2 .

a. Montrer que $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ admet la propriété suivante :

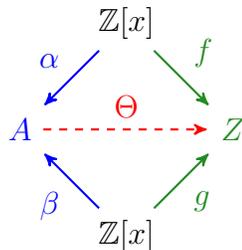
pour tout anneau commutatif Z et tous morphismes d'anneaux commutatifs $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ et $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux commutatifs $\mathbb{Z}[x_1, x_2] \xrightarrow{\Theta} Z$ qui rend commutatif le diagramme suivant



où α et β sont les morphismes d'anneaux définis par $\alpha(x) = x_1$ et $\beta(x) = x_2$.

b. Soit A un anneau commutatif et $\alpha : \mathbb{Z}[x] \rightarrow A$ et $\beta : \mathbb{Z}[x] \rightarrow A$ deux morphismes d'anneaux qui admet la propriété suivante :

pour tout anneau commutatif Z et tous morphismes d'anneaux commutatifs $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ et $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux commutatifs $A \xrightarrow{\Theta} Z$ qui rend commutatif le diagramme suivant.



Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

Exercice 3. Soit $\pi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique. On définit $\bar{\pi} : \mathbb{Z}[x] \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ par

$$\bar{\pi}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_dx^d) = \pi(a_0) + \pi(a_1)x + \pi(a_2)x^2 + \cdots + \pi(a_d)x^d.$$

- En utilisant la propriété universelle de $\mathbb{Z}[x]$, montrer que $\bar{\pi}$ est un morphisme d'anneaux.
- Soit $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Montrer que si $p(x)$ est un polynôme unitaire et si $\bar{\pi}(p(x))$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$, alors $p(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.
- Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur \mathbb{Q} :

$$x^4 + 10x^3 + 7 \quad x^4 - 10x^2 + 1 \quad x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 3$$

Exercice 4. L'anneau des entiers de Gauss est le sous-anneau de \mathbb{C} défini par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{Z}[i]^* &\longrightarrow \mathbb{N} \\ z &\longmapsto |z|^2 \end{aligned}$$

où $\mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$.

- Montrer que $\varphi(z_1) \leq \varphi(z_1z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$.
- Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$. Montrer que il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que

$$z_1 = qz_2 + r \quad \text{avec } r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(z_2).$$

- Montrer que $\varphi(z) \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$.
- Montrer que $\varphi(z) = 1$ ssi z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$.
- Montrer que si z_1 et z_2 sont *associés*¹ dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$.
- Montrer que si z_1 divise z_2 dans $\mathbb{Z}[i]$ et $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, alors z_1 et z_2 sont associés.
- Montrer que si $\varphi(z)$ est un premier dans \mathbb{N} , alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.
- Montrer que $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + i \rangle$ est un corps de cardinalité 2.

1. z_1 et z_2 sont *associés* s'il existe un élément inversible $u \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z_1 = uz_2$.