Devoir 2

à remettre le *23 mars 2016*

Exercice 1. Soit B un anneau unitaire qui admet la propriété suivante :

pour tout anneau unitaire A, il existe un et un seul morphisme d'anneaux $B \to A$.

Montrer que $B \cong \mathbb{Z}$.

Exercice 2. Soit $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ l'anneau de polynômes en deux indéterminées x_1 et x_2.

a. Montrer que $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ admet la propriété suivante :

pour tout anneau commutatif *Z et tous morphismes d'anneaux* commutatifs *$\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ et $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux* commutatifs *$\mathbb{Z}[x_1, x_2] \xrightarrow{\Theta} Z$ qui rend commutatif le diagramme suivant*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}[x] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\ \mathbb{Z}[x_1, x_2] \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & Z \\ & \mathbb{Z}[x] \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

où α et β sont les morphismes d'anneaux définis par $\alpha(x) = x_1$ et $\beta(x) = x_2$.

b. Soit A un anneau commutatif et $\alpha : \mathbb{Z}[x] \to A$ et $\beta : \mathbb{Z}[x] \to A$ deux morphismes d'anneaux qui admet la propriété suivante :

pour tout anneau commutatif *Z et tous morphismes d'anneaux* commutatifs *$\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{f} Z$ et $\mathbb{Z}[x] \xrightarrow{g} Z$, il existe un et un seul morphisme d'anneaux* commutatifs *$A \xrightarrow{\Theta} Z$ qui rend commutatif le diagramme suivant.*

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{Z}[x] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[rr, dashed, "\Theta"] & & Z \\ & \mathbb{Z}[x] \arrow[ul, "\beta"] \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

Montrer que $A \cong \mathbb{Z}[x_1, x_2]$.

Exercice 3. Soit $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ la surjection canonique. On définit $\overline{\pi} : \mathbb{Z}[x] \to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ par

$$\overline{\pi}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots a_dx^d) = \pi(a_0) + \pi(a_1)x + \pi(a_2)x^2 + \cdots \pi(a_d)x^d.$$

a. En utilisant la propriété universelle de $\mathbb{Z}[x]$, montrer que $\overline{\pi}$ est un morphisme d'anneaux.

b. Soit $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Montrer que si $p(x)$ est un polynôme unitaire et si $\overline{\pi}(p(x))$ est irréductible dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$, alors $p(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

c. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$:

$$x^4 + 10x^3 + 7 \qquad x^4 - 10x^2 + 1 \qquad x^4 + 7x^3 + 14x^2 + 3$$

Exercice 4. *L'anneau des entiers de Gauss* est le sous-anneau de $\mathbb{C}$ défini par

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

On définit la fonction

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z}[i]^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ z & \longmapsto & |z|^2 \end{array}$$

où $\mathbb{Z}[i]^* = \mathbb{Z}[i] \setminus \{0\}$.

a. Montrer que $\varphi(z_1) \leq \varphi(z_1z_2)$ pour tout $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$.

b. Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}[i]^*$. Montrer que il existe $q, r \in \mathbb{Z}[i]$ tels que

$$z_1 = qz_2 + r \qquad\qquad \text{avec } r = 0 \text{ ou } \varphi(r) < \varphi(z_2).$$

c. Montrer que $\varphi(z) \geq 1$ pour tout $z \in \mathbb{Z}[i]$.

d. Montrer que $\varphi(z) = 1$ ssi z est inversible dans $\mathbb{Z}[i]$.

e. Montrer que si z_1 et z_2 sont *associés*[1] dans $\mathbb{Z}[i]$, alors $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$.

f. Montrer que si z_1 divise z_2 dans $\mathbb{Z}[i]$ et $\varphi(z_1) = \varphi(z_2)$, alors z_1 et z_2 sont associés.

g. Montrer que si $\varphi(z)$ est un premier dans $\mathbb{N}$, alors z est irréductible dans $\mathbb{Z}[i]$.

h. Montrer que $\mathbb{Z}[i] / \langle 1 + i \rangle$ est un corps de cardinalité 2.

1. z_1 et z_2 sont *associés* s'il existe un élément inversible $u \in \mathbb{Z}[i]$ tel que $z_1 = uz_2$.