Examen Intra 2

Instructions.

1. Vous disposez de **1.5 heures** pour résoudre les problèmes suivants.
2. Il faut justifier toutes vos assertions clairement et proprement ; en particulier, il faut indiquer les résultats que vous utilisez.
3. Dans un problème en plusieurs parties, vous pouvez utiliser le résultat d'une partie précédente, même si vous ne l'avez pas résolu.

(12 pts) **Problème 1.**

Soit A un anneau intègre et $Q(A)$ un corps des fractions de A.

a. Expliquer pourquoi on peut considérer A comme un sous-anneau de $Q(A)$.

Solution. On a vu qu'il existe un morphisme d'anneaux injectif $A \xrightarrow{i} Q(A)$. Donc, A est isomorphe à $i(A)$, ce qui est un sous-anneau de $Q(A)$. On peut donc identifier A avec $i(A) \subseteq B$.

b. Utiliser la propriété universelle du corps des fractions pour montrer explicitement que si K est un corps, alors $K \cong Q(K)$.

Solution.

Rappel : Si A est un anneau intègre, alors le corps des fractions Q vérifie universelle suivante :

Il existe un morphisme d'anneaux injectif $A \xrightarrow{j} Q(A)$ tel que
pour tout corps commutatif K et
pour tout morphisme d'anneaux injectif $A \xrightarrow{f} K$,
il existe un seul morphisme d'anneaux $Q(A) \xrightarrow{\widehat{f}} K$ tel que $f = \widehat{f} \circ j$.

Solution 1. Soit $Q(K)$ le corps de fractions de K. On applique la propriété universelle avec $A = K$ et $f = Id_K$: il existe un seul morphisme d'anneaux $Q(K) \xrightarrow{\widehat{f}} K$ tel que $Id_K = \widehat{f} \circ j$. Comme cette composition est une bijection, on a que $\widehat{f}$ est surjectif. Et, $\widehat{f}$ est injectif, car il est un morphisme dont le domain est un corps. Donc, $\widehat{f}$ est un isomorphisme de $Q(K)$ dans K.

Solution 2. Pour montrer que $K \cong Q(K)$, il suffit de montrer que K vérifie la propriété universelle de $Q(K)$ (car on a montrer dans le cours que le corps des fractions est unique à isomorphisme près). Posons $K \xrightarrow{j} K$ l'identité. Il faut montrer que si $K \xrightarrow{f} K'$ est un morphisme d'anneaux injectif, où K' est un corps, alors il existe un unique morphisme d'anneaux $K \xrightarrow{\widehat{f}} K'$ tel que $f = \widehat{f} \circ j$. Mais, ceci est vrai pour $\widehat{f} = f$.

c. Soit $B \subseteq A$ un sous anneau de A. Montrer que $Q(B)$ est isomorphe à un sous anneau de $Q(A)$.

$$\left(\begin{array}{l}\textit{Indices :}\\ \text{— } \textit{on peut se servir de la construction explicite de } Q(A) \textit{ et } Q(B)\textit{, ou}\\ \text{— } \textit{on peut appliquer la propriété universelle à la composition } B \xrightarrow{\text{incl}} A \xrightarrow{i} Q(A)\textit{,}\\ \text{— } \textit{ou on peut trouver une autre façon de procéder.}\end{array}\right)$$

Solution 1.

— B est un sous-anneau d'un anneau intègre (l'anneau A) ; donc, si $ab = 0$ dans B, on a que $ab = 0$ dans A ce qui entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.

— On applique la propriété universelle de $B \xrightarrow{j} Q(B)$ à $B \xrightarrow{\text{incl}} A \xrightarrow{i} Q(A)$: il existe un unique morphisme d'anneaux $Q(B) \xrightarrow{f} Q(A)$ tel que $f \circ j = i \circ \text{incl}$.

— Comme $i \circ \text{incl}$ est la composition de deux injections, elle est une injection et donc non nulle. Donc, f est non nul.

— $Q(B) \xrightarrow{f} Q(A)$ est injectif : En effet, son noyau, étant un idéal de $Q(B)$, est soit 0 soit $Q(B)$ puisque les seuls idéaux d'un corps son 0 et le corps lui-même.

Solution 2.

— B est un sous-anneau d'un anneau intègre (A) ; donc, si $ab = 0$ dans B, on a que $ab = 0$ dans A ce qui entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.

— Par la construction de $Q(A)$, on a que A se plonge dans $Q(A)$. Donc, $B \subseteq A \subseteq Q(A)$.

— Comme $Q(B)$ est le plus petit corps qui contient B et $Q(A)$ est un corps qui contient B, on a que $Q(B) \subseteq Q(A)$.

Solution 3.

— $Q(B) = (B \times B^*)/\sim$ et $Q(A) = (A \times A^*)/\sim$.

— Comme $B \subseteq A$, on a que $B \times B^* \subseteq A \times A^*$.

— On définit une application $(B \times B^*)/\sim \longrightarrow (A \times A^*)/\sim$ par $[(b, b')] \mapsto [(b, b')]$.

— Elle est un morphisme d'anneaux bien défini et injectif.

— Donc, $(B \times B^*)/\sim \cong (A \times A^*)/\sim$.

d. Soit C un sous-anneau de $Q(A)$ tel que $A \subseteq C \subseteq Q(A)$. Montrer que $Q(C) \cong Q(A)$.

Solution 1.

— C est un sous-anneau d'un corps (le corps $Q(A)$) ; donc, si $ab = 0$ dans C, on a que $ab = 0$ dans $Q(A)$ ce qui entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.

— Comme $A \subseteq C$, on a que $Q(A) \subseteq Q(C)$ par la partie précédente.

— Comme $C \subseteq Q(A)$, alors $Q(C) \subseteq Q(Q(A))$. par la partie précédente.
— Le corps des fractions d'un corps est le corps lui-même, donc $Q(Q(A)) = Q(A)$.
— Donc, $Q(C) \subseteq Q(A) \subseteq Q(C)$.

Solution 2.

— B est un sous-anneau d'un corps $(Q(A))$; donc, si $ab = 0$ dans B, on a que $ab = 0$ dans $Q(A)$ ce qui entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.
— Il suffit de montrer que $Q(A)$ vérifie la propriété universelle de $Q(B)$.
— Comme $B \subseteq Q(A)$, on définit l'application $i : B \to Q(A)$ comme étant l'inclusion de B dans $Q(A)$. Remarquons que i est un morphisme d'anneaux injectif.
— Soit K un corps et $B \xrightarrow{f} K$ un morphisme injectif d'anneau. Il faut montrer qu'il existe un unique morphisme $\widehat{f}$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "f"'] & Q(A) \arrow[d, "\widehat{f}"] \\ & K \end{tikzcd}$$

— Soit $A \xrightarrow{j} Q(A)$ l'inclusion de A dans $Q(A)$. En appliquant la propriété universelle de $Q(A)$ à la composition $A \xrightarrow{f \circ j} K$, on a qu'il existe un unique morphisme $Q(A) \xrightarrow{g} K$ qui rend commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[drr, hook, bend right, "f \circ j"'] & B \arrow[r, hook, "i"] & Q(A) \arrow[d, "g"] \\ & & K \end{tikzcd}$$

— Vérifions que g rend commutatif le diagramme précédent. On a que

$$g \circ i \circ j = f \circ j$$

Comme j est injectif,

$$g \circ i = f.$$

Comme i et j sont des inclusions, on a que $g(a) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
En outre, l'application g est défine par $g(a/a') = f(a)f(a')^{-1}$.
Si $b \in B$, alors il existe $a_1, a_2 \in A$ tel que $b = a_1/a_2$. Donc,

$$g(b) = g(a_1/a_2) = f(a_1)f(a_2)^{-1} = f(a_1/a_2)$$

Solution 3.

- B est un sous-anneau d'un corps $(Q(A))$; donc, si $ab = 0$ dans B, on a que $ab = 0$ dans $Q(A)$ ce qui entraîne $a = 0$ ou $b = 0$.
- Par la propriété universelle de $Q(B)$:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, hook, "j"] \arrow[dr, hook, "\mathrm{incl}"'] & Q(B) \arrow[d, "f"] \\ & Q(A) \end{tikzcd}$$

- Par la propriété universelle de $Q(A)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, hook, "\mathrm{incl}"'] & Q(A) \arrow[d, "g"] \\ & Q(B) \end{tikzcd}$$

- Donc, $Q(B)$ est isomorphe à un sous-anneau de $Q(A)$. En effet, le morphisme $\widehat{\mathrm{incl}}$ est injectif : son noyau, étant un idéal de $Q(B)$, est soit 0 soit $Q(B)$ puisque comme $Q(B)$ est un corps, il ne possède que 2 idéaux.
- Donc, à isomorphisme près, on a $A \subseteq B \subseteq Q(B) \subseteq Q(A)$.
- Comme $Q(A)$ est le plus petit corps qui contient A, on a que $Q(A) \subseteq Q(B)$.

(6 pts) **Problème 2.**

a. Montrer que $3x^3 + 5x - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Solution.

- Si le polynôme est réductible, alors il possède un facteur de degré 1, et donc une racine dans $\mathbb{Q}$.
- Mais, les racines rationnelle du polynôme sont de la forme s/t, où $\mathrm{pgcd}(s,t) = 1$, $s | -1$ et $t | 3$.
- Or, $1, -1, 1/3, -1/3$ ne sont pas de racines (vérification directe).

b. Montrer que $4x^7 - 3x^2 + 6x - 12$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Solution. On applique le critère d'Eisenstein avec le nombre premier 3.

(8 pts) **Problème 3.**

Soit A un anneau intègre et $p, q \in A$. Montrer que si p et q sont des éléments premiers et si p divise q, alors p et q sont associés.

Solution.
- Soit $p, q \in A$ premiers tels que p divise q.
- Alors, il existe $a \in A$ tel que $q = ap$.
- Comme q est premier, soit q divise a soit q divise p.
- Si q divise a, alors $a = qb$ et donc $q = ap = q(bp)$ d'où $bp = 1$. Mais, p n'est pas inversible, car p est premier. Donc, q divise p.
- Si q divise p, alors q et p sont associés (p divise q par hypothèse).

(9 pts) **Problème 4.**

Soit $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $\frac{s}{t}$ une racine rationnelle de $f(x)$ avec $t \neq 0$ et $\text{pgcd}(s, t) = 1$.

(Par exemple, $\frac{1}{4}$ est une racine rationnelle de $f(x) = 8x^3 - 10x^2 - 10x + 3$.)

a. Montrer que $tx - s$ divise $f(x)$ dans $\mathbb{Z}[x]$. (Rappeler que $f(x)$ est divisible par $x - \frac{s}{t}$ dans $\mathbb{Q}[x]$.)

Solution.
- Il faut montrer que $f(x)/(tx - s)$ est un polynôme à coefficients entiers.
- Comme s/t est une racine rationnelle de $f(x)$, il existe un polynôme $g(x) \in \mathbb{Q}[x]$ tel que $f(x) = \left(x - \frac{s}{t}\right) g(x)$.
- Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $dg(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Considérons $(td)f(x) = (tx - s)\, dg(x)$.
- Soit p un nombre premier qui divise td. Alors, par un lemme du cours, on a que soit p divise tous les coefficients de $tx - s$; ou p divise tous les coefficients de $dg(x)$.
- Comme t et s sont copremiers, il faut que p divise tous les coefficients de $dg(x)$.
- En répétant cet argument, on a que td divise tous les coefficients de $dg(x)$. Donc, $\frac{dg(x)}{td} \in \mathbb{Z}[x]$.

b. En déduire que dans $\mathbb{Z}$ on a que $t - s$ divise $f(1)$ et que $t + s$ divise $f(-1)$.

Solution.
- Par la partie précédente, $f(x) = (tx - s)g(x)$ dans $\mathbb{Z}[x]$
- Donc, $f(1) = (t - s)g(1)$ et $t - s$ divise $f(1)$.
- Donc, $f(-1) = (t(-1) - s)g(1) = 1(t + s)g(-1)$ et $t + s$ divise $f(-1)$.

c. Montrer que $f(x)$ n'a pas de racines *entiers* si $f(0)$ et $f(1)$ sont impairs.

Solution.
- Supposons que $f(0)$ et $f(1)$ sont impairs et que s/t est une racine de f.
- Alors, le terme constant de f est impair ; d'où s est impair, car s divise le terme constant de $f(0)$.
- Comme $t - s$ divise $f(1)$, on a que $t - s$ est aussi impair.
- D'où, t est pair, ce qui n'est pas possible si s/t est un entier.