Feuille d'exercices 1

Exemples d'anneaux

Exercice 1. Soit A un anneau unitaire et $A[X]$ l'ensemble des polynômes en la variable X à coefficients dans A. Montrer que $A[X]$ avec l'addition et le produit habituels des polynômes forme un anneau unitaire.

Exercice 2. Soit A un anneau unitaire et $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$ l'ensemble des matrices de format $n\times n$ à coefficients dans A. Montrer que $\mathrm{Mat}_{n\times n}(A)$ muni de l'addition et du produit habituels des matrices forme un anneau unitaire.

Exercice 3. On définit deux opérations $\boxplus$ et $\boxtimes$ sur $\mathbb{Z}$:

$$\begin{aligned} a \boxplus b &= a + b - 1 \\ a \boxtimes b &= ab - (a+b) + 2 \end{aligned}$$

Montrer que $\mathbb{Z}$ muni de $\boxplus$ et $\boxtimes$ est un anneau unitaire qui ne possède pas des diviseurs de zéro.

Exercice 4. Soit $C(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $C(\mathbb{R})$ muni de l'addition et du produit « poncturellement » est un anneau :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x).$$

Exercice 5. Soit $C_0(\mathbb{R})$ l'ensemble de fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tels que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Par exemple, $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ et $f(x) = \frac{sin(x)}{e^{|x|}}$ appartiennent à $C_0(\mathbb{R})$.

Montrer que $C_0(\mathbb{R})$ muni de l'addition et du produit suivants

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{et} \qquad (f\cdot g)(x) = f(x)g(x)$$

vérifie la définition d'un *anneau qui ne possède pas un élément neutre* pour la multiplication.

Sur la définition d'un anneau

Exercice 6. *(Cet exercice vise à répondre à la question : pourquoi exigeons-nous la commutativité de l'addition dans la définition d'un anneau ?)*

Dans la définition d'un anneau *unitaire*, remplacer l'axiome

« $(A,+)$ est un groupe abélien »

par ce qui suit :

« $(A,+)$ est un groupe » (pas nécessairement abélien).

Montrer pour tous $a, b \in A$ on a que $a + b = b + a$.

Sur les éléments inversibles

Exercice 7. Soit A un anneau unitaire non trivial. Montrer que l'ensemble d'éléments inversibles dans A, muni de la multiplication de A, est un groupe.

Exercice 8. Si A est un anneau unitaire commutatif non trivial et ab est inversible dans A, alors a et b sont inversibles dans A.

Exercice 9. Soit $a \in A$. Montrer que si a possède un inverse à gauche y et un inverse à droite x, alors a est inversible et $a^{-1} = x = y$.

Exercice 10. Soit A un anneau unitaire non trivial. Si $a \in A$ tel que $a^2 = 0$, montrer que $a + 1$ et $a - 1$ sont inversibles dans A.

Exercice 11. Soit A un anneau unitaire commutatif. Montrer que si a est un diviseur de zéro dans A, alors a n'est pas inversible.

Exercice 12. Soit A un anneau unitaire tel que tout élément $a \in A$ est idempotent.

a. Montrer que A est commutatif et $a + a = 0$.

b. Montrer que tout élément $a \neq 1$ est un diviseur de zéro.

c. Montrer que 1 est le seul élément inversible dans A.