Feuille d'exercices 10

Anneaux principaux

Exercice 1. Soit A un anneau principal et $a, b, c \in A$. Montrer que si $a \mid bc$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.

Exercice 2. Soit A un anneau principal et $p \in A$. Montrer que les énoncés suivants sont équivalents.

a. p est un élément premier dans A ;

b. $A / \langle p \rangle$ est un corps commutatif ;

c. $A / \langle p \rangle$ est un anneau intègre.

Anneaux factoriels

Exercice 3. Soit A un anneau factoriel et I un idéal premier non trivial de A. Montrer qu'il existe un élément $p \in A$ tel que l'idéal $\langle p \rangle$ est premier et vérifie $\{0\} \subsetneq \langle p \rangle \subseteq I$.

Exercice 4. Soit A un anneau factoriel et $a, b \in A$. Montrer que

$$\operatorname{pgcd}(a, b) = p_1^{\min\{\alpha_1,\beta_1\}} p_2^{\min\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_t^{\min\{\alpha_t,\beta_t\}}$$
$$\operatorname{ppcm}(a, b) = p_1^{\max\{\alpha_1,\beta_1\}} p_2^{\max\{\alpha_2,\beta_2\}} \cdots p_t^{\max\{\alpha_t,\beta_t\}}$$

où

$$a = w\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_t^{\alpha_t} \qquad \text{et} \qquad b = v\, p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \cdots p_t^{\beta_t}$$

avec $w, v \in A$ des éléments inversibles, $p_1, \ldots, p_t \in A$ des éléments irréductibles deux-à-deux non associés, et α_i, β_j des entiers positifs (éventuellement nul).

Exercice 5. Soit A un anneau factoriel et $a, b \in A$. Montrer que a et b possèdent un pgcd et un ppcm, et que

$$\operatorname{pgcd}(a, b) \operatorname{ppcm}(a, b) = u\, ab,$$

où u est un élément inversible de A.

Exercice 6. Soit A un anneau factoriel et $a, b, c \in A$. Montrer que si $a \mid bc$ et $\operatorname{pgcd}(a, b) = 1$, alors $a \mid c$.

Exercice 7. Soit A un anneau factoriel et $n \in \mathbb{N}$. Si $f, g, h \in A$ sont tels que

$$f, g, h \text{ sont non nuls}; \quad fg = h^n; \quad f \text{ et } g \text{ sont copremiers};$$

montrer qu'il existe $u, v \in A$ inversibles et $\widetilde{f}, \widetilde{g} \in A$ tels que

$$f = u\widetilde{f}^n \qquad \text{et} \qquad g = v\widetilde{g}^n.$$

Par exemple, dans $A = \mathbb{Z}$, on a

$$(-196)(-225) = 210^2 \qquad -196 = (-1)\,14^2 \qquad -225 = (-1)\,25^2.$$

Exercice 8. Soit A un anneau intègre qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) tout élément irréductible de A est premier dans A ;

(ii) pour toute suite $I_0, I_1, I_2, \ldots$ d'idéaux principaux de A tels que $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots$, il existe $m \geq 0$ tel que $I_m = I_{m+1} = I_{m+2} = \cdots$.

Montrer que A est un anneau factoriel.

(Indice: Revoir la démonstration du théorème que tout anneau principal est factoriel.)