Feuille d'exercices 3

Anneaux quotients

Exercice 1. Soit A un anneau et I un idéal bilatère de A. Montrer que tout élément $x+I$ de l'anneau quotient A/I admet une racine carrée (c'est-à-dire, un élément $y+I$ tel que $(y+I)^2 = x+I$) ssi pour tout $x \in A$ il existe $y \in A$ tel que $x - y^2 \in I$.

Exercice 2. Soit A un anneau et I un idéal bilatère de A. Montrer que tout élément de A/I est nilpotent ssi I vérifie la propriété suivante : pour tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n \in I$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif.

a. Montrer que l'ensemble N d'éléments de A qui sont nilpotents est un idéal de A.

b. Montrer que A/N ne possède pas des éléments nilpotents (autre que 0).

Morphismes d'anneaux

Exercice 4. *(Morphismes et sous-anneaux)* Soit A, B deux anneaux non nuls (unitaires).

> *On dit qu'une application* $\psi : A \to B$ *est un* psuedo-morphisme d'anneaux *si*
>
> *(M1)* $\psi(x+y) = \psi(x) + \psi(y)$ *pour tous* $x, y \in A$ *; et*
>
> *(M2)* $\psi(x \cdot y) = \psi(x) \cdot \psi(y)$ *pour tous* $x, y \in A$.
>
> *Un* morphisme d'anneaux *est un pseudo-morphisme* $\psi : A \to B$ *qui vérifie la condition*
>
> *(M3)* $\psi(1_A) = 1_B$.

Soit $\psi : A \to B$ un psuedo-morphisme d'anneaux.

a. Montrer que l'image d'un *psuedo-morphisme* $\psi : A \to B$ est un anneau.

b. Montrer que l'image d'un *morphisme* $\varphi : A \to B$ est un sous-anneau de B.

c. Montrer que le morphisme nul $\zeta : A \to B$, défini par $\zeta(a) = 0$ pour tout $a \in A$, est un psuedo-morphisme. Est-il un morphisme ? En déduire que l'image d'un *psuedo-morphisme* n'est pas forcément un sous-anneaux de B.

d. Soit S une partie de A. Montrer que S est un sous-anneau de A ssi l'inclusion $\mathrm{incl} : S \to A$ est un morphisme d'anneaux. *(L'inclusion est l'application définie par* $\mathrm{incl}(s) = s$ *pour tout* $s \in S$*.)*

e. Montrer que si $1_B \in \psi(A)$, alors ψ est un morphisme d'anneaux.

f. Montrer que si ψ est surjectif, alors ψ est un morphisme d'anneaux.

g. Montrer que si ψ est non nul et B ne possède pas des diviseurs de zéro, alors ψ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 5. *(Théorème des restes chinois)* Soit a et b deux entiers tels que $a, b \leq 1$. Notons $m = \text{ppcm}(a, b)$ et $d = \text{pgcd}(a, b)$. Montrer que

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & (x + a\mathbb{Z}, x + b\mathbb{Z}) \end{array}$$

est un morphisme d'anneaux dont le noyau est $\ker(\varphi) = m\mathbb{Z}$ et l'image est

$$\text{im}(\varphi) = \{(x + a\mathbb{Z}, y + b\mathbb{Z}) : d \text{ divise } x - y\}.$$

Exercice 6. *(Adjonction d'une unité)* Soit A un « *anneau sans unité* ». On munit le produit direct $A_1 = A \times \mathbb{Z}$ des groupes abéliens A et $\mathbb{Z}$ de la multiplication

$$(a_1, n_1) \cdot (a_2, n_2) = (a_1 a_2 + n_1 a_2 + n_2 a_1, n_1 n_2).$$

a. Montrer que A_1 est un anneau unitaire.

b. Montrer que $A_0 = \{(a, 0) : a \in A\}$ est un idéal de l'anneau A_1.

c. Montrer que l'application $\psi : A \to A_0$ définie par $\psi(a) = (a, 0)$ est une bijection qui préserve l'addition et la multiplication. (Autrement dit, A est « isomorphme » à A_0.)

Exercice 7. Soit A un anneau et

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : A & \longrightarrow & \text{End}_{Ab}(A) \\ a & \longmapsto & \lambda_a \end{array}$$

où $\lambda_a : A \to A$ est la fonction définie par $\lambda_a(x) = ax$ pour tout $x \in A$.

a. Montrer que λ_a est un morphisme de groupes abéliens. Est-il un morphisme d'anneaux ?

b. Montrer que Λ est une injection.

c. Montrer que Λ est un morphisme d'anneaux.