Feuille d'exercices 4

Théorèmes d'isomorphisme

Exercice 1. Montrer que $R[x]/\langle x^2+1\rangle \cong R[x]/\langle x^2+8x+17\rangle$.

Exercice 2. Soit n un entier positif. Montrer que $\mathrm{End}_{Ab}(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ en tant qu'anneaux.

Exercice 3.

> *Soit* $\mathrm{Fon}(\mathbb{R})$ *l'anneau de fonctions de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$ *muni de l'addition et de la multiplication :* $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ *et* $(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x)$.

Soit I l'ensemble de fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont le graphe passe par les points $(0,0)$ et $(1,0)$.

a. Montrer que I est un idéal de $\mathrm{Fon}(\mathbb{R})$.

b. Montrer que $\mathrm{Fon}(\mathbb{R})/I \cong \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit A un anneau commutatif et $a \in A$ un élément idempotent.

a. Montrer que l'application $\pi_a(x) = ax$ est un pseudo-morphisme d'anneaux de A dans A.

b. Montrer que le noyau de π_a est $I_a = \{x \in A : ax = 0\}$.

c. Montrer que l'image de π_a est l'idéal principal $Aa = \{ax : x \in A\}$.

d. Montrer que Aa est un anneau unitaire et que π_a est un morphisme d'anneaux de A dans Aa. En déduire que $A/I_a \cong Aa$.

Théorème de correspondance

Exercice 5. Soit $\varphi : A_1 \to A_2$ un morphisme d'anneaux.

a. Soit B_2 un sous-anneau de A_2 et $B_1 = \varphi^{-1}(B_2)$. Montrer que B_1 est un sous-anneau de A_1 contenant $\ker(\varphi)$.

b. Montrer que $\varphi(B_1) = B_2$ si φ est surjectif. En déduire que $B_2 \cong B_1/\ker(\varphi)$.

c. Soit I_2 un idéal à gauche (respectivement, à droite, bilatère) de A_2 et $I_1 = \varphi^{-1}(I_2)$. Montrer que I_1 est un idéal à gauche (resp., à droite, bilatère) de A_1 contenant $\ker(\varphi)$.

d. Soit I_2 un idéal bilatère de A_2 et $I_1 = \varphi^{-1}(I_2)$. Montrer que l'application $\psi : A_1 \to A_2/I_2$ définie par $a \mapsto \varphi(a) + I_2$ est un morphisme d'anneaux qui induit une injection

$$\begin{aligned} \widehat{\psi} : A_1/I_1 &\longrightarrow A_2/I_2 \\ a + I_1 &\longmapsto \varphi(a) + I_2 \end{aligned}$$

et si φ est surjectif, alors $\widehat{\psi}$ est un isomorphisme.

L'anneau d'un groupe

Exercice 6. Soit A un anneau commutatif et G un groupe fini dont l'opération est notée multiplicativement. On note AG l'ensemble de combinaisons linéaires formelles des éléments de G à coefficients dans A ; autrement dit, les éléments de AG sont les expressions de la forme

$$\sum_{g\in G} a_g g, \qquad \text{où } a_g \in A \text{ pour tout } g \in G.$$

On définit l'addition de deux éléments de AG par

$$\sum_{g\in G} a_g g + \sum_{g\in G} b_g g = \sum_{g\in G} (a_g + b_g)\, g,$$

et la multiplication de deux éléments de AG par

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G} c_g g, \qquad \text{où} \quad c_g = \sum_{h\in G} a_h b_{h^{-1}g}.$$

a. Montrer que AG est un anneau dont l'unité est l'élément neutre de G.

b. Montrer que AG est commutatif ssi G est abélien.

c. Montrer que l'application $\varepsilon : AG \to A$ défini par

$$\varepsilon\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) = \sum_{g\in G} a_g$$

est un morphisme d'anneaux.

d. Montrer que le noyau $\ker(\varepsilon)$ est engendré par les éléments $g - h$, où $g, h \in G$.

e. Montrer que le noyau $\ker(\varepsilon)$ est engendré par les éléments $g - 1$, où $g \in G$.