Feuille d'exercices 6

Polynômes sur un anneau qui n'est pas intègre

Exercice 1.

a. Montrer que $x^2 + 8$ possède 4 racines sur $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$.

b. Montrer que $x^2 + 8 \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[x]$ admet plus qu'une factorisation sous la forme $p_1(x)p_2(x)$ avec $p_1(x), p_2(x) \in (\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})[x]$ des polynômes unitaires de degré 1.

Exercice 2. Soit A un anneau tel que $a^2 = a$ et $a + a = 0$ pour $a \in A$. Montrer que tout élément de A est une racine du polynôme $x^2 + x \in A[x]$.

Polynômes irréductibles

Exercice 3.

a. Trouver un nombre premier p pour lequel $x^2 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

b. Trouver un nombre premier p pour lequel $x^2 - 2$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 4.

a. Montrer que $x^2 + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

b. Factoriser $x^4 - 4$ en facteurs irréductibles sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

c. Déterminer si $x^3 + x^2 + x + 2$ est irréductible sur $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. S'il n'est pas irréductible, factoriser le polynôme en facteurs irréductibles.

Théorème de factorisation unique pour l'anneau de polynômes sur un corps

Exercice 5. Soit K un corps et $n \in \mathbb{N}$. Si $f(x), g(x), h(x) \in K[x]$ sont tels que

$$f(x), g(x), h(x) \text{ sont non nuls}\,; \quad f(x)g(x) = h(x)^n\,; \quad f(x) \text{ et } g(x) \text{ sont copremiers}\,;$$

montrer qu'il existe $u, v \in K$ inversibles et $\widetilde{f}(x), \widetilde{g}(x) \in K[x]$ tels que

$$f(x) = u\widetilde{f}(x)^n \qquad \text{et} \qquad g(x) = v\widetilde{g}(x)^n.$$