Feuille d'exercices 7

Polynômes irréductibles sur un corps commutatif K

Exercice 1. Soit $p(x)$ et $q(x)$ des polynômes dans $K[x]$, où K est un corps commutatif. Vrai ou faux : Si $p(x)$ et $q(x)$ ont les mêmes racines dans K, alors $p(x)$ est un multiple scalaire de $q(x)$.

Exercice 2. Soit $p(x)$ et $q(x)$ des polynômes dans $K[x]$ du même degré d, où K est un corps commutatif. Montrer que si $p(a) = q(a)$ pour d valeurs distinctes de $a \in K$, alors $p(x) = q(x)$.

Exercice 3. Soit K un corps commutatif et $p(x) \in K[x]$. Montrer que $p(x)$ est irréductible sur K ssi $p(x + k)$ est irréductible sur K pour tout $k \in K$.

Polynômes irréductibles sur $\mathbb{Q}$

Exercice 4.

a. Déterminer si le polynôme $p(x) = 2x^4 + 3x^2 - 2$ possède des racines rationnelles.

b. Existe-il une factorisation non triviale de $p(x)$ sur $\mathbb{Z}$?

Exercice 5. Trouver les racines rationnelles des polynômes suivants.

$$\begin{aligned} a(x) &= 3x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 15x - 14 \\ b(x) &= x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24 \\ c(x) &= 4x^4 - 7x^2 - 5x - 1 \end{aligned}$$

Exercice 6. Trouver toutes les valeurs de m pour lesquelles le polynôme $3x^2+mx-5 \in \mathbb{Q}[x]$ n'est pas irréductible.

Exercice 7. Montrer que tout polynôme de la forme $x^2 + bx + c \in \mathbb{Z}[x]$ où $b^2 - 4c$ n'est pas un carré parfait est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

Critère d'Eisenstein

Exercice 8. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$.

a. $\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}$

b. $\frac{1}{5}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x^2 + 1$

Exercice 9.

a. Montrer que $x^4 + 4x + 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(Indice: Considérer le polynôme $(x+1)^4 + 4(x+1) + 1$.)

b. Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$:

(a) $x^4 + 2x^2 - 1$ (b) $x^3 - 3x^2 + 1$ (c) $x^4 + 1$

(Indice: Faire une substitution.)

Exercice 10. Soit $n \geq 1$ un entier. On définit

$$\Phi_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1.$$

a. Montrer que si k et l sont copremiers, alors le pgcd de $x^k - 1$ et $x^l - 1$ est $x - 1$.

b. Montrer que si k et l sont copremiers, alors $(x^k - 1)(x^l - 1)$ divise $(x - 1)(x^{kl} - 1)$.

c. Montrer que si n n'est pas premier, alors Φ_n n'est pas irréductible.

d. Montrer que si n est premier Φ_n est irréductible sur $\mathbb{Q}$.

(Indice: faire la substitution $x = y + 1$.)