Feuille d'exercices 8

Corps des fractions d'un anneau intègre

Exercice 1. Montrer que le corps des fractions de $\mathbb{Z}[i]$ est $\mathbb{Q}[i] = \{a + bi : a, b \in \mathbb{Q}\}$.

Exercice 2. Calculer le corps des fractions de chacun des anneaux suivants.

a. $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ *b.* $\mathbb{Z}[\sqrt{3}]$ *c.* $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ *d.* $\mathbb{Z}[x]$

Exercice 3. Montrer que si A et B sont des anneaux intègres isomorphes, alors leurs corps des fractions sont isomorphes.

Exercice 4. Soit P un idéal premier d'un anneau intègre A. Montrer que

$$B = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in A, b \notin P \right\}$$

est un sous-anneau du corps des fractions de A.

Éléments irréductibles dans un anneau de polynômes

Définition/Rappel : Soit A un anneau commutatif. Un polynôme $p(x) \in A[x]$ est irréductible sur A *si $p(x)$ n'est ni inversible, ni produit de deux polynômes non inversibles.*

Exercice 5.

a. Montrer que tout polynôme constant non nul dans $\mathbb{Q}[x]$ n'est pas irréductible sur $\mathbb{Q}$.

b. Montrer que le polynôme constant $p(x) = 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[x]$.

Exercice 6. Soit K un corps commutatif et $p(x) \in K[x]$. Montrer que $p(x)$ est irréductible sur K ssi $\langle p(x) \rangle$ est un idéal maximal de $K[x]$.

Exercice 7. Montrer que $\mathbb{R}[x]/\langle x^2 - 1 \rangle$ n'est ni un corps ni un anneau intègre.

Anneaux intègres, divisibilité, éléments associés

Exercice 8. Soit A un anneau intègre et $a, b, c \in A$.

a. Montrer que a divise 0 et que 1 divise a.

b. Montrer que a divise 1 ssi a est inversible dans A.

c. Montrer que si a divise b, alors ac divise bc.

d. Montrer que si a divise b et c, alors a divise $sb + tc$ pour tous $s, t \in A$.