Feuille d'exercices 9

Anneaux euclidiens

Exercice 1. Soit A un anneau euclidien de valuation φ, et $a, b \in A^*$. Montrer que $\varphi(ab) = \varphi(a)$ ssi b est inversible.

Exercice 2. Soit A un anneau euclidien de valuation φ. Montrer que si a est un diviseur propre de b (c'est-à-dire, $b = ax$ avec a non inversible et non associé à b), alors $\varphi(a) < \varphi(b)$.

Exercice 3. Soit A un anneau euclidien de valuation φ et $a \in A^*$ tel que

(i) $\varphi(a) > \varphi(1)$; et

(ii) pour tout $b \in A^*$, si $\varphi(b) < \varphi(a)$, alors $\varphi(b) = \varphi(1)$.

Montrer que a est irréductible.

Exercice 4. Montrer que $\varphi(f(x)) = 2^{\deg(f(x))}$ est une valuation sur l'anneau $K[x]$, où K est un corps commutatif, vérifiant $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ pour tous polynômes non nuls $f, g \in K[x]$.

> (*Pour la petite histoire* : il est un problème ouvert de déterminer si tout anneau euclidien admet une valuation φ vérifiant $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tous $a, b \in A^*$.)

Exercice 5. Soit A un anneau euclidien de valuation φ et $a \in A$ un élément non nul et non inversible. Montrer, par récurrence sur $\varphi(a)$, que a est un produit d'éléments irréductibles.

Exercice 6. Montrer que l'anneau quotient $\mathbb{Z}[i]/I$ est fini pour tout idéal non nul I de $\mathbb{Z}[i]$.

(Indice: Rappeler que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau euclidien.)

Non existence d'un pgcd

Exercice 7. Soit $\alpha = \sqrt{-5}$.

a. Montrer que $1 + \alpha$ divise $3 + 3\alpha$ et $3 - 3\alpha$ dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.

b. Montrer que $1 - \alpha$ divise $3 + 3\alpha$ et $3 - 3\alpha$ dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.

c. En déduire que $3 + 3\alpha$ et $3 - 3\alpha$ ne possèdent pas un pgcd dans $\mathbb{Z}[\alpha]$.

d. Conclure que $\mathbb{Z}[\alpha]$ n'est pas un anneau euclidien et qu'il n'est pas un anneau principal.

Rappel : Liens entre idéaux maximaux, idéaux premiers et anneaux quotients

Exercice 8. Soit A un anneau et I un idéal de A.

a. Montrer que I est premier ssi A/I est un anneau intègre.

b. Montrer que I est premier ssi $I \neq A$ et $x, y \in A \setminus I$ implique que $xy \in A \setminus I$.

Exercice 9. Soit A un anneau et M un idéal de A.

a. Montrer que M est maximal ssi A/M est un corps.

b. Montrer que si M est maximal, alors M est premier.