Devoir 1

À remettre le *1 février 2011* ; aucun retard ne sera toléré.

Exercice 1. Déterminer les rayons de convergences des séries entière suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{3n}}{8^n+1}$ *b.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(2^n+3^n)\,z^n$ *c.* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)z^n$

Exercice 2. Démontrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et la série $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont le même rayon de convergence.

Exercice 3. Décider si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Si vous pensez qu'une affirmation est vrai, fournir une raison pour laquelle elle est vrai ; si vous pensez qu'une affirmation est fausse, fournir un contre-exemple.

a. Si la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge, alors la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n a_n$ converge.

b. Si la suite $\{z_n\}$ converge, alors elle est un suite de Cauchy.

c. Il existe une série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-2)^n$ qui diverge en z=0 mais qui converge en z=5.

d. Si le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est 2, alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ converge en $z=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

e. Si $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=2$, alors le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est 2.

f. Soit f une fonction complexe. Si f est analytique en z_0, alors f est continue en z_0.