Devoir 2

À remettre le *22 mars 2011* ; aucun retard ne sera toléré.

Exercice 1. (10 pts) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des points du cercle unité. Montrer qu'il existe un point z sur le cercle unité tel que le produit des distances entre z et a_j et au moins 1. (*Piste : considérer la fonction* $f(z) = (z - a_1) \cdots (z - a_n)$.)

Exercice 2. (10 pts) Soit f une fonction holomorphe et non-constante sur le disque de centre z_0 et rayon $\rho > 0$. Si $f(z_0) \neq 0$, montrer qu'il existe un point z de ce disque tel que $|f(z)| < |f(z_0)|$.

Exercice 3. (10 pts) Supposons que f soit une fonction entière tel que $f(0) = 1$ et pour $|z| < 1$ on ait $\mathrm{Im}(f(z)) \geq 0$. Montrer que $f(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 4. Evaluer les intégrales suivantes :

a. (4 pts) $\displaystyle\int_\gamma \mathrm{Ré}(z)\, dz$, où γ est le bord du carré de sommets 0, 1, $1+i$ et i.

b. (3 pts) $\displaystyle\int_\gamma e^z\, dz$, où γ est la partie du cercle unité entre 1 et i dans le sens antihoraire.

c. (3 pts) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z^2}\, dz$, où γ est le cercle de centre 0 et rayon 2 dans le sens antihoraire.

Exercice 5. (10 pts) Soit γ le disque de centre z_0 et de rayon $r > 0$. Montrer qu'il existe $R > 0$ tel que

$$\left| \int_\gamma \frac{1}{(z - z_0)^k}\, dz \right| < \frac{L(\gamma)}{R^k}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $L(\gamma)$ et la longueur du chemin γ.