Solution au problème 4, feuille d'exercices 9

(a) Remarquer que $f(u) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u^n$ et $g(u) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n u^n$ pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|u| < 1$. Pour $|z| < 1$ et w sur le cercle $C(0,r)$, on a que $\left|\frac{z}{w}\right| < 1$. Donc,

$$g\left(\frac{z}{w}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{z}{w}\right)^n$$

Alors,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w}\, g\left(\frac{z}{w}\right) dw$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w} \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{w^n} \right) dw$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw \right) z^n$$

(g converge absolument)

$$= \sum_{n=0}^{\infty} b_n a_n z^n$$

Par le théorème de Cauchy,

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w^{n+1}}\, dw}$$

(b) Par la partie (a), $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n$ pour n'importe quel choix de r tel que $|z| < r < 1$. En particulier, ce développement est valide pour tout $|z| < 1$. Car une série entière est analytique, on conclut que h est analytique sur $D(0,1)$.

(c) <u>Contre-exemple</u>.

Soit $f(z) = \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots$

et $g(z) = \cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$

Alors, $a_n = 0$ si n est pair

et $b_n = 0$ si n est impair.

Donc,
$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n z^n = 0,$$

mais $f(z) \neq 0$ et $g(z) \neq 0$ pour tout z tel que $|z| < 1$.