Feuille d'exercices 10

Exercice 1. Chacune des fonctions suivantes a une singularité isolée en $z = 0$. Déterminer la nature de la singularité. Si la singularité est effaçable, définir $f(0)$ de sorte que f soit holomorphe en 0. Si la singularité est un pôle, trouver son ordre.

$$f(z) = \frac{\cos(z) - 1}{z} \qquad g(z) = \frac{\cos(1/z) - 1}{1/z} \qquad h(z) = \frac{1}{1 - e^z}$$

Exercice 2. Trouver les résidus de la fonction

$$g(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} + \frac{1}{2 - z}$$

en 0, 1 et 2. (*Piste. Vous avez déjà calculé le développement en série de Laurent de cette fonction sur la feuille d'exercices précédente.*)

Exercice 3. Trouvez les résidus des fonctions suivantes en 0.

$$f(z) = \frac{1}{z^2} \qquad g(z) = \frac{1}{(z-1)^2} \qquad h(z) = \frac{\sin(z)}{z} \qquad j(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right)$$

Exercice 4. Évaluer l'intégrale suivante en suivant les étapes indiquées.

$$\int_\gamma \frac{z^2 - z + 9}{(z^2+1)(z^2+9)}\, dz$$

où γ est le rectangle avec sommets -4, 4, $4 + 4i$, et $-4 + 4i$.

a. Calculer les pôles de l'intégrande. (Il y a quatre.)

b. Déterminer les pôles qui se trouvent à l'intérieur du rectangle délimitée par γ. (Il y a deux.)

c. Calculer les résidus de l'intégrande en ces deux points.

d. En déduire la valeur de l'intégrale à l'aide du théorème des résidus.

Exercice 5. Soit f une fonction sur un ouvert simplement connexe U et soit γ un lacet dans U. En déduire l'identité suivante du théorème des résidus : pour tout z de $U \setminus \operatorname{img}(\gamma)$,

$$\int_\gamma \frac{f(w)}{w - z}\, dw = 2\pi i f(z) \operatorname{Ind}_\gamma(z)$$

(*Piste. Appliquer le théorème des résidus à la fonction* $\frac{f(w)}{w-z}$.)