

Feuille d'exercices 11

Exercice 1. Trouver les résidus des fonctions suivantes en les points indiqués.

$$a. \frac{2z^2 - 1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \text{ en } i \text{ et en } 2i \quad \left[\frac{i}{2}, \frac{-3i}{4} \right]$$

$$b. \frac{z^2}{1 + z^4} \text{ en } \frac{1+i}{\sqrt{2}} \text{ et en } \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \quad \left[\frac{1-i}{4\sqrt{2}}, \frac{-1-i}{4\sqrt{2}} \right]$$

$$c. \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2} \text{ en } i \quad \left[\frac{-i}{2e} \right]$$

$$d. \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)} \text{ en } i \text{ et en } 2i \quad \left[\frac{-i}{6e}, \frac{i}{12e^2} \right]$$

$$e. \frac{1}{2z^2 + 5iz - 2} \text{ en } -\frac{i}{2} \quad \left[\frac{-i}{3} \right]$$

Exercice 2. Évaluer l'intégrale suivante à l'aide du théorème des résidus.

(Piste. Utiliser votre calculs des résidus ci-dessus.)

$$a. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2 - 1}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad \left[\frac{\pi}{2} \right]$$

$$b. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx \quad \left[\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right]$$

$$c. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)^2} dx \quad \left[\frac{\pi}{e} \right]$$

$$d. \int_0^{\infty} \frac{\cos(x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx \quad \left[\pi \left(\frac{1}{6e} - \frac{1}{12e^2} \right) \right]$$

$$e. \int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 4 \sin(t)} dt \quad \left[\frac{2\pi}{3} \right]$$