Feuille d'exercices 2

Exercice 1. Soit θ un nombre réel tel que $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \neq 0$. Montrer les identités :

$$1 + \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(n\theta) = \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\sin(\theta) + \sin(2\theta) + \cdots + \sin(n\theta) = \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Conclure que les séries $\sum_{n=0}^{\infty} \sin(n\theta)$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \cos(n\theta)$ ont des sommes partielles bornées.

Exercice 2. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est normalement convergente, alors $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est uniformément convergente et absolument convergente.

Exercice 3. Montrer que la somme d'une série normalement convergente de fonctions continues est continue.

Exercice 4. Déterminer les rayons de convergences des séries entière suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$

b. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{8^n + 1}(z-5)^{2n}$

c. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} z^n$

d. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n$

Exercice 5. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ un série entière qui converge au point $z = 1 + i\sqrt{3}$ mais pas absolument. Déterminer le rayon de convergence de la série.

Exercice 6. Si la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ est absolument convergente pour un point sur son cercle de convergence, alors elle converge pour chaque point sur son cercle de convergence.