Feuille d'exercices 3

Exercice 1. Montrer le *test de Abel* : Soient a_n et b_n des nombres *réels*. Supposons qu'il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ et une constante $M \in \mathbb{R}$ qui vérifient les conditions suivantes :

(1) $a_{n+1} \leq a_n$ pour tout $n \geq N$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$;

(3) $\left|b_N + b_{N+1} + b_{N+2} + \cdots + b_n\right| \leq M$ pour tout $n \geq N$.

Alors, la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ converge.

Exercice 2. Trouver le rayon de convergence de la série entière :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2 + (-1)^n)^n \, z^n$$

Exercice 3. Démontrer que les racines complexes d'un polynôme à coefficients réels viennent par paires d'éléments conjugué : si z est un racine, alors $\bar{z}$ est aussi racine.

Exercice 4. Soit U un ouvert et soit A un partie de U. On dit A *est fermé dans* U si tout point d'accumulation de A qui appartient à U, appartient aussi à A. Montrer que A est fermé dans U si et seulement si $U \backslash A$ est ouvert. (Rappelez : $U \backslash A = \{z \in U \mid z \notin A\}$.)

Exercice 5. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit f une fonction analytique sur U. Montrer que tout sous-ensemble compact de U ne contient qu'un nombre fini de zéros de la fonction f.